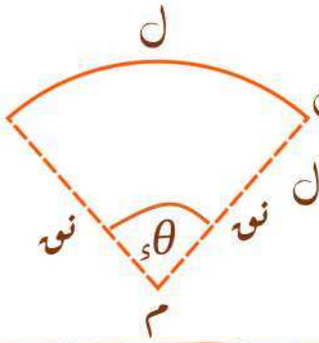
الفهرس

	من	إلى
أهم التراكميات في البحتة	1	14
ملخص وتمارين الوحدة الأولى فراغية	15	31
ملخص وتمارين الوحدة الأولى جبر	32	44
ملخص وتمارين الوحدة الأولى تفاضل	45	64
ملخص وتمارين الوحدة الثانية فراغية	65	82
ملخص وتمارين الوحدة الثانية جبر	83	104
ملخص وتمارين الوحدة الثانية تفاضل	105	123
ملخص وتمارين التكامل	124	140
أهم فنيات البحتة	141	156
امتحانات السنين السابقة للرياضيات البحتة	157	200

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

القطاع الدائرى :



- المحيط = ٢ نق + ل
- المساحة = $\frac{1}{2}$ نق ل
- $\theta_c = \frac{ل}{نق}$

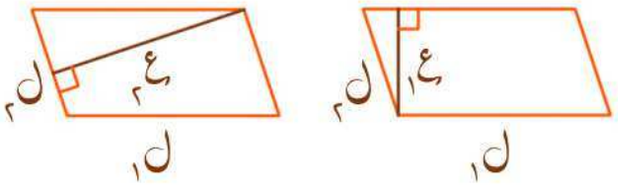
القطعة الدائرية :

- المساحة
  = مساحة القطاع الدائرى - مساحة المثلث
- المساحة = $\frac{1}{2}$ نق^{2} (θ_c - حا θ)

المثلث :

- = مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة
- المساحة = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعى القائمة
  = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طول أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما
  = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع المناظر لها
  = $\frac{1}{2}$ || $\overrightarrow{م}$ || × || $\overrightarrow{ب}$ || حيث $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران في المثلث

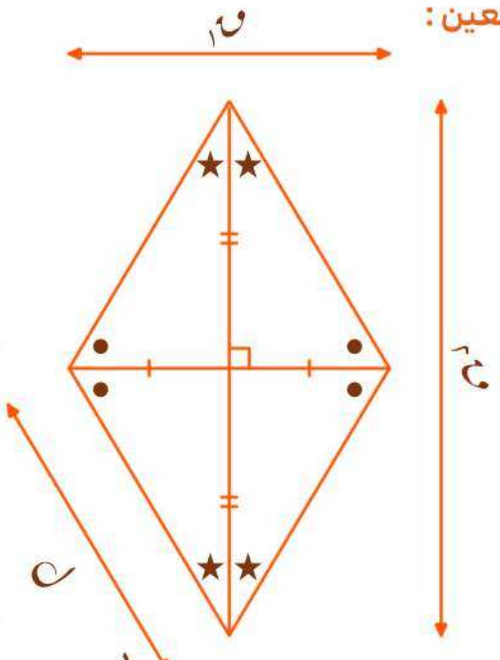
متوازى الأضلاع :



- المحيط = ٢ (ل١ + ل٢)
- المساحة = ل١ ع١ = ل٢ ع٢
  = طول القاعدة × الارتفاع المناظر لها

★ كل زاويتين متقابلتين متساويتين
وكل زاويتين متجاورتين متكاملتين

المعين :

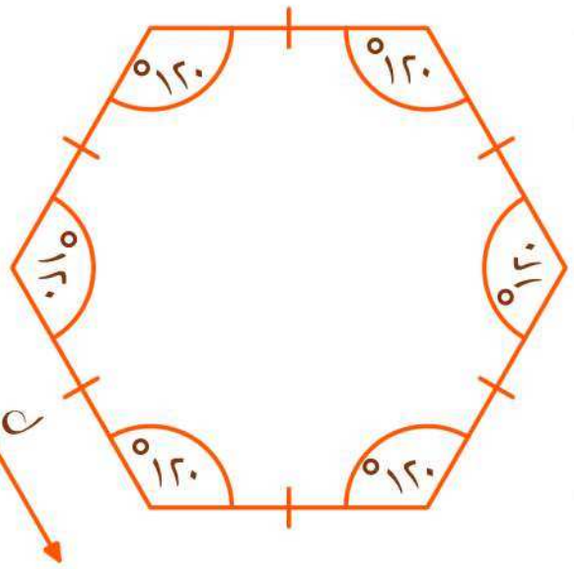


- المحيط = ٤ ل
- المساحة = $\frac{1}{2}$ ن١ ع١

★ القطران متعامدان وغير متساويان وينصف كل منهما الآخر وينصفا زاوية الرأس

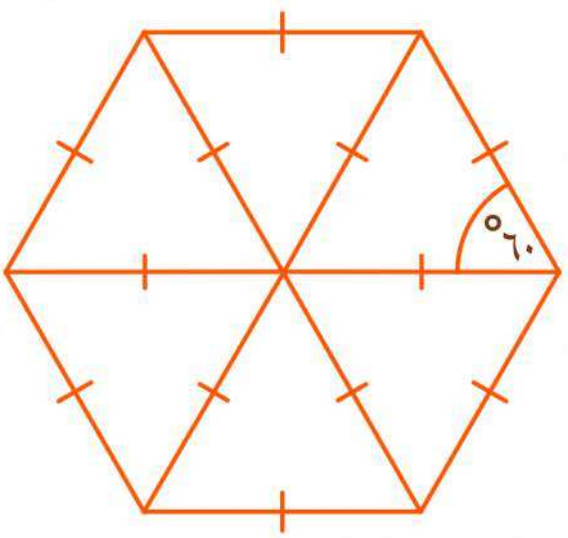
قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

★ السداسي المنتظم :

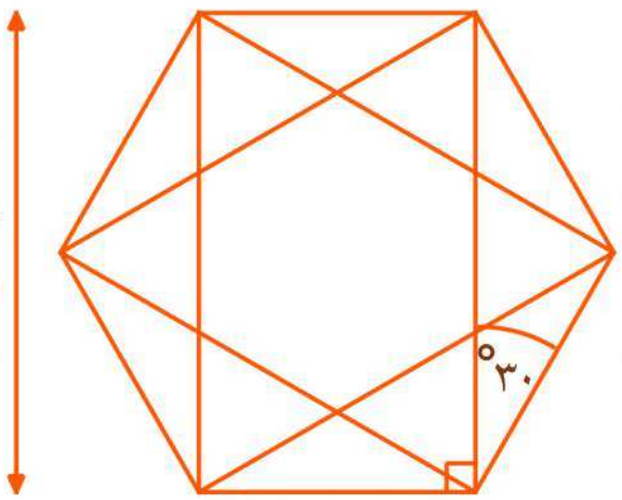


- المحيط = ٦ ل
- المساحة = $\frac{٦}{٤}$ ل^{٢} ظتا $\frac{\pi}{٦}$

★ كل أضلاعه متساوية في الطول
وكل زواياه متساوية وتساوي ١٢٠°
وله ثلاثة أقطار رئيسية
وله ستة أقطار فرعية



★ الأقطار الرئيسية طولها ضعف طول
ضلع السداسي = ٢ ل وكل قطر رئيسى
يقسم السداسي إلى نصفين متساويين
وعند رسم الثلا ثة أقطار معًا ينقسم
السداسي إلى ٦ مثلثات متطابقة
ومتساوية الأضلاع وكل قطر رئيسي هو
عبارة عن محور تماثل للشكل السداسي

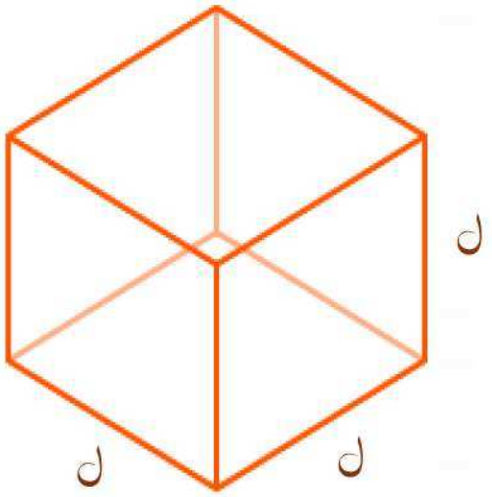


★ الأقطار الفرعية طولها = ٢ل √٣ وتكون
عمودية على ضلع وتصنع زاوية ٣٠° مع
الضلع المجاور له وعند رسم ال ٦ أقطار
معًا ينقسم كل قطر إلى ثلاثة أجزاء
متساوية في الطول

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المكعب : (٦ مربعات)

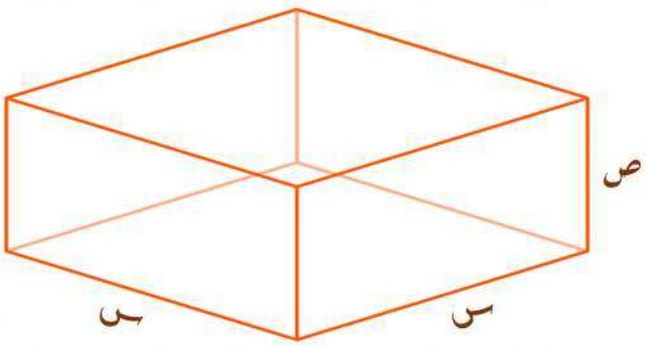
هو عبارة عن ٦ أوجه (٤ جوانب + قاعدة وغطاء)



- المساحة الجانبية = ٤ ل^{٢}
- المساحة الكلية = ٦ ل^{٢}
- الحجم = ل^{٣}

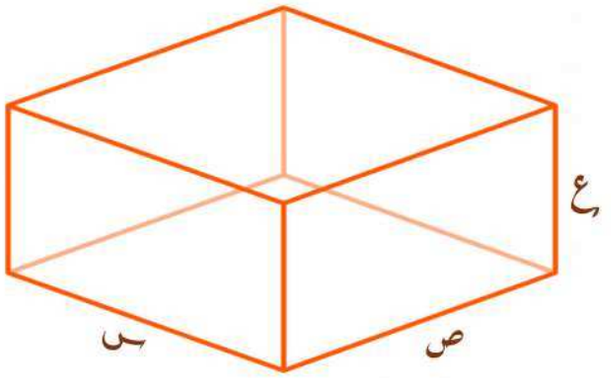
متوازي مستطيلات قاعدته مربعة :

(٦ مستطيلات + مربعين)



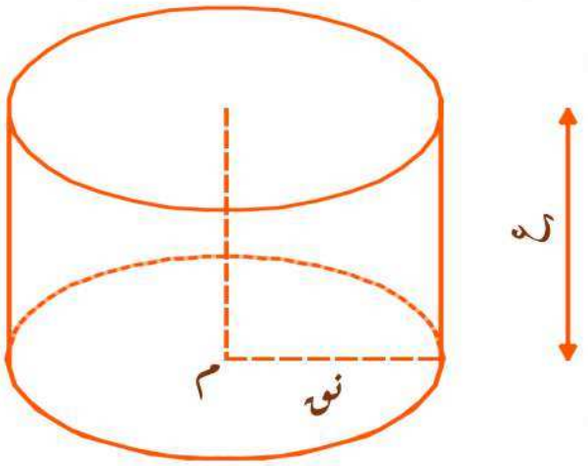
- المساحة الجانبية = ٤ س ص
- المساحة الكلية = ٢ س^{٢} + ٤ س ص
- الحجم = س^{٢} ص

متوازي المستطيلات : (٦ مستطيلات)



- المساحة الجانبية = ٢ ع (س + ص)
- المساحة الكلية = ٢ (س ص + س ع + ص ع)
- الحجم = س ص ع

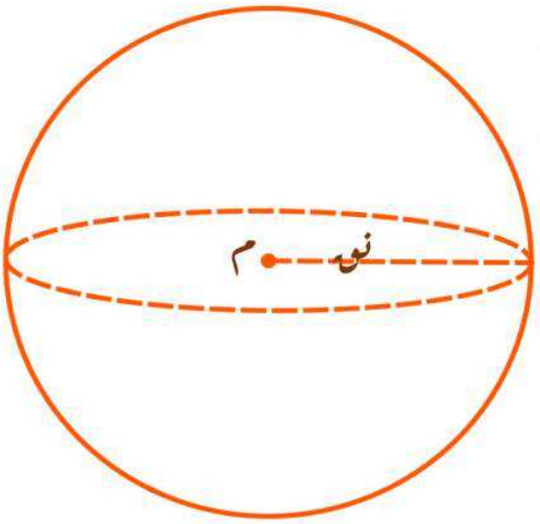
الأسطوانة الدائرية القائمة :



- المساحة الجانبية = ٢ π نق ع
- المساحة الكلية = ٢ π نق^{٢} + ٢ π نق ع
- الحجم = π نق^{٢} ع

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بالطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بالطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

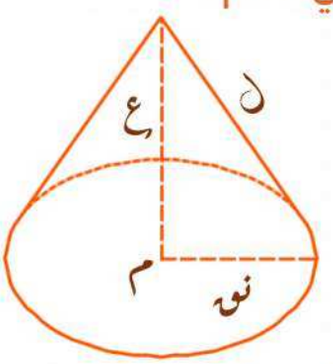
الكرة :



- المساحة = ٤π نق^{٢}
- الحجم = $\frac{٤}{٣} \pi$ نق^{٣}

المخروط الدائري القائم :

ع (الارتفاع)
ل (طول الراسم)
نق (نصف القطر)



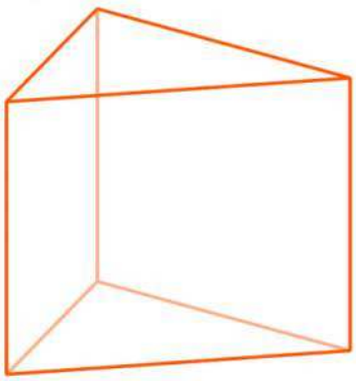
- المساحة الجانبية = π نق ل
- المساحة الكلية = π نق ل + π نق^{٢}
- الحجم = $\frac{١}{٣} \pi$ نق^{٢} ع

★ الكرة تنتج من دوران نصف دائرة دورة كاملة

★ المخروط ينتج من دوران مثلث قائم دورة كاملة

★ الأسطوانة تنتج من دوران مستطيل دورة كاملة

المنشور :



- المساحة الجانبية = محيط القاعدة X الارتفاع
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدة
- الحجم = مساحة القاعدة X الارتفاع

الهرم المنتظم :

- المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة X الارتفاع الجانبي
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
- الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة X الارتفاع

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

د (س) = لو$_{م}$ س ⟺ س = م$^{د (س)}$

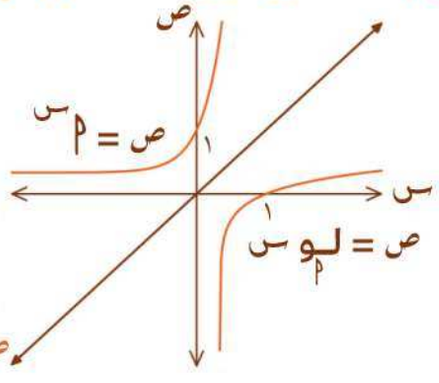
★ ما بداخل اللوغاريتم لازم يكون موجب
لكن الناتج منه يكون أي حاجة عادى
سواء موجب أو سالب أو صفر

★ قواعد اللوغاريتمات :

- لو$_{م}$ م = ١ ، لو$_{م}$ س^{ن} = ن لو$_{م}$ س
- لو$_{م}$ (س ص) = لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ ص مش بيتوزع
- لو$_{م}$ (س/ص) = لو$_{م}$ س − لو$_{م}$ ص ضرب ولا قسمة
- لو$_{ص}$ س = لو$_{م}$ س / لو$_{م}$ ص ، لو$_{م}$ م = ١ / لو$_{ب}$ م
- لو$_{م}$ ⊗ = ⊗ ، لو$_{م}$ ١ = ٠

★ إذا كان اللوغاريتم بدون أساس يكون
الأساس ١٠ ⟸ لو ١٠٠ = لو$_{١٠}$ ١٠٠ = ٢

★ الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية
للدالة الأسية يعنى لو رسمناها
هنلاقيهم متماثلين حول المستقيم ص = س



★ عند رسم الدالة د (س) والدالة العكسية
لها د$^{-١}$ (س) يكونوا متماثلين حول
المستقيم ص = س

١٣ دالة التركيب

- د ○ ر (س) = د (ر (س))
- ر ○ د (س) = ر (د (س))
- د ○ د (س) = د (د (س))

مثال : إذا كانت : د (س) = ٣ / (س − ٢)
، ر (س) = س^{٢} + ١ فإن :

- د (٢) = ٣ / (٢ − ٢) غير معرفة
- ر (−٢) = (−٢)^{٢} + ١ = ٥
- د ○ ر (−٢) = د (ر (−٢))
= د (٥) = ٣ / (٥ − ٢) = ١

★ قاعدة هامة جدًا

إذا كانت ر هي الدالة العكسية للدالة د
فإن : د ○ ر = ر ○ د = س

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١٦ دالة المقياس

◄ |ⓧ| = $\sqrt{ⓧ^2}$ أو نعيد تعريف المقياس كالآتي ◄ نحل المتباينة : ⓧ ≥ ٠

◄ |ⓧ| = { ⓧ عند الفترة التي تحقق أن : ⓧ ≥ ٠ ، − ⓧ عند الفترة التي تحقق أن : ⓧ < ٠ }

◄ |س + ٢| لكي نعيد تعريف المقياس نقوم بحل المتباينة : س + ٢ ≥ ٠ ◄ س ≥ − ٢

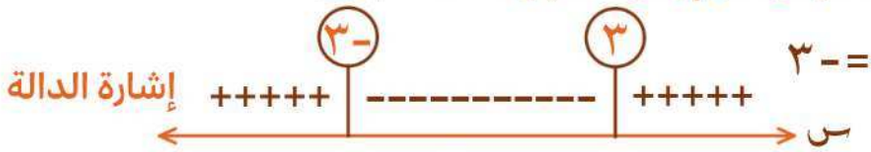
◄ |س + ٢| = { س + ٢ ، س ≥ − ٢ ، − (س + ٢) ، س < − ٢ } ◄ |س + ٢| = $\sqrt{(س+٢)^2}$

◄ |٣ − س| لكي نعيد تعريف المقياس نقوم بحل المتباينة : ٣ − س ≥ ٠ ◄ س ≤ ٣

◄ |٣ − س| = { ٣ − س ، س ≤ ٣ ، − (٣ − س) ، س > ٣ } ◄ |٣ − س| = $\sqrt{(٣-س)^2}$

◄ |س^2 − ٩| لكي نعيد تعريف المقياس نقوم بحل المتباينة : س^2 − ٩ ≥ ٠

◄ س^2 − ٩ = ٠ ◄ س = ٣ ، س = − ٣



◄ |س^2 − ٩| = { س^2 − ٩ ، − ٣ ≤ س ≤ ٣ ، − (س^2 − ٩) ، − ٣ > س > ٣ } ◄ |س^2 − ٩| = $\sqrt{(س^2-٩)^2}$

◄ |س^2 − ٢ س − ٨| لكي نعيد تعريف المقياس نقوم بحل المتباينة : س^2 − ٢ س − ٨ ≥ ٠

◄ س^2 − ٢ س − ٨ = ٠ ◄ س = ٤ ، س = − ٢

◄ |س^2 − ٢ س − ٨| = { س^2 − ٢ س − ٨ ، − ٢ ≤ س ≤ ٤ ، − (س^2 − ٢ س − ٨) ، − ٢ > س > ٤ }

◄ |س^2 − ٢ س − ٨| = $\sqrt{(س^2-٢س-٨)^2}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظات

- $\sqrt{\otimes^2} = |\otimes|$ دائمًا
  - $\otimes$ لو $\otimes$ موجبة

الجذر مبيطيرش التربيع إلا لو كان اللى تحت التربيع موجب دائمًا

- $\sqrt{(س+2)^2} = |س+2| \neq س+2$
- $\sqrt{(س^2+1)^2} = س^2+1$

بينما : $(\sqrt{\otimes})^2 = \otimes$ دائمًا

التربيع بيطير الجذر دائمًا

حل معادلات المقياس :

- $|س| = 4$ ⟵ $س = 4$ ، $س = -4$
- $|س+3| = 7$ ⟵ $س+3 = 7$ ، $س+3 = -7$ ⟵ $س = 4$ ، $س = -10$
- $|س-2| = -1$ ⟵ ليس لها حل في الأعداد الحقيقية لأن الناتج من المقياس دائمًا موجب

خواص المقياس :

- $|أ ب| = |أ| \times |ب|$ يوزع ضرب
- $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$ يوزع قسمة
- $|أ|^{ن} = |أ^{ن}|$
- $|أ + ب| \geq |أ| + |ب|$
- $|أ| = |ب|$ إذا كان : $أ = ب$ أو $أ = -ب$

مثالـ : إذا كان : $|س-1| = |2س+3|$ أوجد : س

- $|س-1| = |2س+3|$ ⟵ $س-1 = 2س+3$ أو $س-1 = -2س-3$
- $س = -4$
- $س = \frac{-2}{3}$
- $س \in \{-4 ، \frac{-2}{3}\}$

حل متباينات المقياس :

- $|س| \geq 4$ ⟵ $-4 \geq س \geq 4$ ⟵ $س \in [-4 ، 4]$
- $|2س-3| \geq 5$ ⟵ $-5 \geq 2س-3 \geq 5$ ⟵ $-2 \geq 2س \geq 8$ /2 ⟵ $-1 \geq س \geq 4$
- $س \in [-1 ، 4]$
- $|3س+5| < 7$ ⟵ $-7 < 3س+5 < 7$ ⟵ $-12 < 3س < 2$ /3 ⟵ $-4 < س < \frac{2}{3}$
- $س \in]-\infty ، -4[\cup]\frac{2}{3} ، \infty[$

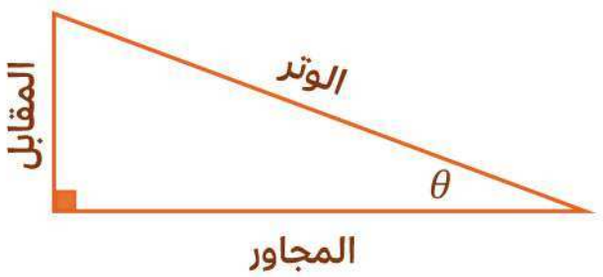
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١٧ الدوال المثلثية

★ $\text{جا}\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ⟵ $\text{قتا}\theta = \frac{١}{\text{جا}\theta}$

★ $\text{جتا}\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ⟵ $\text{قا}\theta = \frac{١}{\text{جتا}\theta}$

★ $\text{ظا}\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ⟵ $\text{ظتا}\theta = \frac{١}{\text{جتا}\theta}$



★ $\text{جا}\theta \times \text{قتا}\theta = \text{جتا}\theta \times \text{قا}\theta = \text{ظا}\theta \times \text{ظتا}\theta = ١$

★ قواعد هامة جدًا :

$\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$ (÷ جا²θ ⟵ $١ + \text{ظتا}^{٢}\theta = \text{قتا}^{٢}\theta$ ، ÷ جتا²θ ⟵ $\text{ظا}^{٢}\theta + ١ = \text{قا}^{٢}\theta$)

- $\text{جا}^{٢}\theta = ١ - \text{جتا}^{٢}\theta$ ، $\text{جتا}^{٢}\theta = ١ - \text{جا}^{٢}\theta$
- $\text{ظا}^{٢}\theta = \text{قا}^{٢}\theta - ١$ ، $\text{قا}^{٢}\theta - \text{ظا}^{٢}\theta = ١$
- $\text{ظتا}^{٢}\theta = \text{قتا}^{٢}\theta - ١$ ، $\text{قتا}^{٢}\theta - \text{ظتا}^{٢}\theta = ١$

★ قوانين مجموع زاويتين :

- $\text{جا}(أ \pm ب) = \text{جا}أ \text{جتا}ب \pm \text{جتا}أ \text{جا}ب$
- $\text{جتا}(أ \pm ب) = \text{جتا}أ \text{جتا}ب \mp \text{جا}أ \text{جا}ب$
- $\text{ظا}(أ \pm ب) = \frac{\text{ظا}أ \pm \text{ظا}ب}{١ \mp \text{ظا}أ \text{ظا}ب}$
- $\text{ظا}(س + \frac{\pi}{٤}) = \frac{\text{ظا}س + \text{ظا}\frac{\pi}{٤}}{١ - \text{ظا}س \text{ظا}\frac{\pi}{٤}} = \frac{١ + \text{ظا}س}{١ - \text{ظا}س}$
- $\text{جا}أ \text{جا}ب = \frac{١}{٢}(\text{جتا}(أ - ب) - \text{جتا}(أ + ب))$
- $\text{جتا}أ \text{جتا}ب = \frac{١}{٢}(\text{جتا}(أ - ب) + \text{جتا}(أ + ب))$
- $\text{جا}أ \text{جتا}ب = \frac{١}{٢}(\text{جا}(أ - ب) + \text{جا}(أ + ب))$

★ قوانين ضعف الزاوية :

- $\text{جا}٢\theta = ٢\text{جا}\theta \text{جتا}\theta$
- $\text{جا}\theta \text{جتا}\theta = \frac{١}{٢}\text{جا}٢\theta$
- $\text{جتا}٢\theta = \text{جتا}^{٢}\theta - \text{جا}^{٢}\theta$
  - $٢\text{جتا}^{٢}\theta - ١$
  - $١ - ٢\text{جا}^{٢}\theta$
- $\text{جا}^{٢}\theta = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\theta$
- $\text{جتا}^{٢}\theta = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\theta$
- $\text{ظا}٢\theta = \frac{٢\text{ظا}\theta}{١ - \text{ظا}^{٢}\theta}$

★ أي زاويتين مجموعهم ٩٠° يكون جا واحدة يساوي جتا التانية ⟵ $\text{جا}(٩٠° \pm \theta) = \text{جتا}\theta$

★ أي زاويتين مجموعهم ١٨٠° يكون ليهم نفس الـ جا ⟵ $\text{جا}(١٨٠° - \theta) = \text{جا}\theta$

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٧ تحديد مجال الدالة

★ **مجال الدالة**
- جبريًا : مجموعة قيم س التي تكون عندها الدالة معرفة
- بيانيًا : حدود الدالة على محور س

★ **الدالة الكسرية** : مجالها هو : ح − { أصفار المقام }

- د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}+٣}$ ⟵ س + ٣ = ٠ ⟵ س = − ٣ (أصفار المقام) ⟵ مجال د هو : ح − {− ٣}
- د (س) = $\frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}$ ⟵ $\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤ = ٠$ ⟵ س = ٢ ⟵ مجال د هو : ح − {٢}
  (أصفار المقام)
- د (س) = $\frac{١}{\text{س}^{٢} + ٩}$ ⟵ $\text{س}^{٢} + ٩ = ٠$ (ليس لها حل في الأعداد الحقيقية) ⟵ مجال د هو : ح

★ **الدالة الجذرية** :

- إذا كانت : د (س) = $\sqrt[ن]{\text{ر}(\text{س})}$ وكان
  - ن زوجي : مجال د هو مجموعة حل المتباينة ر (س) ≥ ٠
  - ن فردي : مجال د هو مجال ر (س)

- د (س) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$ ⟵ س − ٢ ≥ ٠ ⟵ س ≥ ٢ ⟵ مجال د هو : س ∈ [٢ ، ∞ [
- د (س) = $\sqrt[٤]{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}$ ⟵ $\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣ \geq ٠$ (نوجد أصفار الدالة ثم نبحث إشارتها)
- $\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣ = ٠$ ⟵ س = − ١ ، س = ٣ [أصفار الدالة]

إشارة الدالة: +++++ (١-) ---------- (٣) +++++ ← س

- مجال د هو : س ∈]− ∞ ، − ١] ∪ [٣ ، ∞ [أو ح −]− ١ ، ٣[
- د (س) = $\sqrt[٣]{٣ - \text{س}}$ ⟵ مجال د هو مجال (٣ − س) ⟵ مجال د هو : ح

لا بارك الله في عملٍ يلهي عن الصلاة

★ **الدالة اللوغاريتمية :** مجالها هو : ما بداخل اللوغاريتم > ٠

❮ د (س) = لـو (س − ٣) ❮ س − ٣ > ٠ ❮ س > ٣ ❮ مجال د هو : س ∈]٣ ، ∞[

❮ د (س) = لـو س ❮ س > ٠ ❮ مجال د هو : س ∈]٠ ، ∞[❮ س ∈ ح$^{+}$

❮ د (س) = لـو (٤ − س^{٢}) ❮ ٤ − س^{٢} > ٠ (نوجد أصفار الدالة ثم نبحث إشارتها)

❮ ٤ − س^{٢} = ٠ ❮ س = ٢ ، س = −٢ [أصفار الدالة]

❮ مجال د هو : س ∈] −٢ ، ٢ [

★ إذا كانت الدالة ليست كسرية وليست جذرية دليلها زوجي وليست لوغاريتمية فإن مجالها : ح

❮ د (س) = ٥^{س} ، د (س) = ٤ − س^{٢} ، د (س) = $\sqrt[٥]{س - ٢}$ × $\pi^{س}$

★ جميع الدوال السابقة مجالها : ح

★ جميعنا نعلم أن بعض الأسئلة في التفاضل والتكامل معتمدة على التبسيط ولكن لا يجب التبسيط قبل إيجاد المجال

❮ د (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$ ❮ مجال د هو : س ∈ ح − {−١} (قفزة يمكن إزالتها)

❮ د (س) = لـو س^{٢} ❮ مجال د هو : س ∈ ح − {٠}

★ قد يكون المجال معطى :

❮ إذا كانت : د (س) = $\frac{س}{س + ٣}$ حيث : س ∈]١ ، ٤] ❮ مجال د هو : س ∈]١ ، ٤]

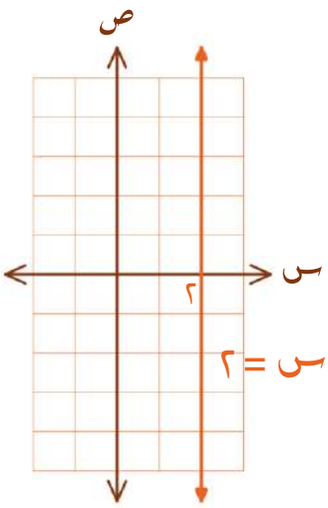
❮ إذا كانت : د :]−١ ، ٥] ⟵ ح حيث : د (س) = س^{٣} − ٢ س − ٣

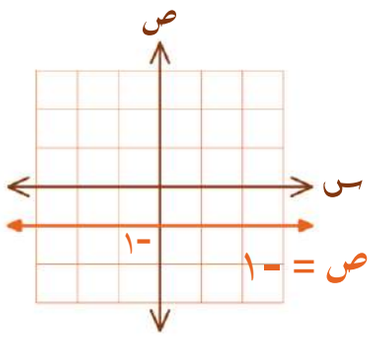
❮ مجال د هو : س ∈]−١ ، ٥]

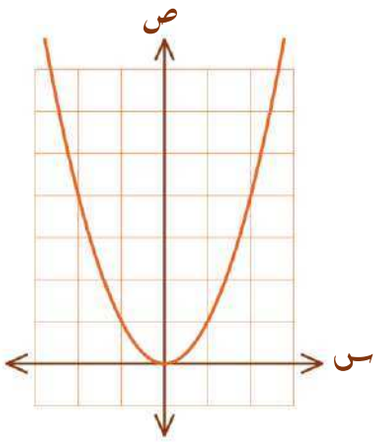
❮ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س + ١}$ حيث : ٠ ≤ س ≤ ٣ ❮ مجال د هو : س ∈ [٠ ، ٣]

رسم الدوال :

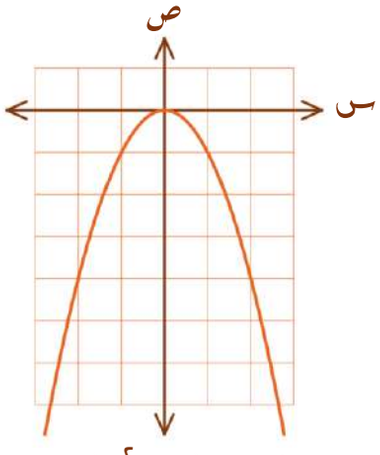
- معادلة محور س : ص = ٠ (ميله بصفر) ← معادلة محور ص : س = ٠ (ميله غير معرف)
- س = أ : معادلة مستقيم رأسي يقطع محور س في أ ← س = ٢
- ص = أ : معادلة مستقيم أفقي يقطع محور ص في أ ← ص = -١



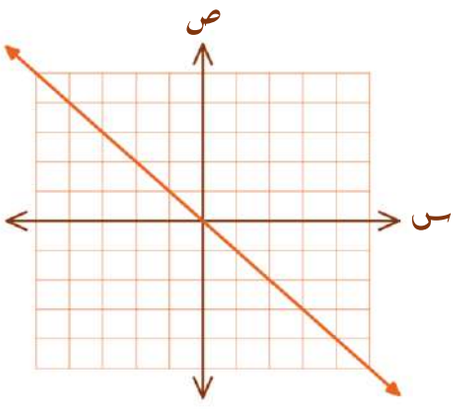




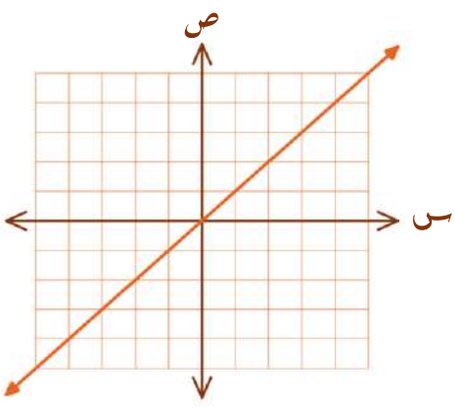
ص = أ س^{٢} : أ > ٠



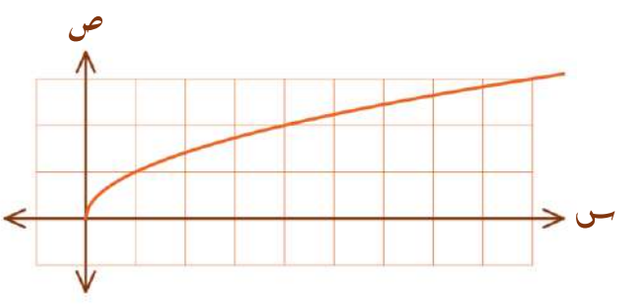
ص = أ س^{٢} : أ < ٠



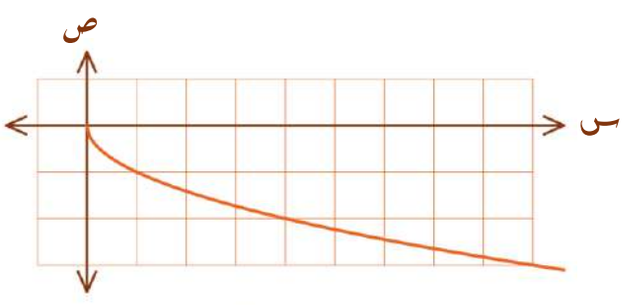
ص = أ س : أ < ٠



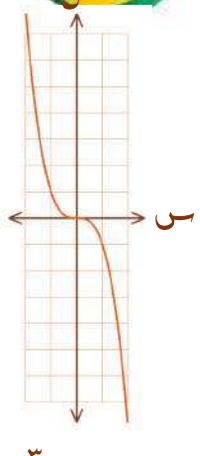
ص = أ س : أ > ٠



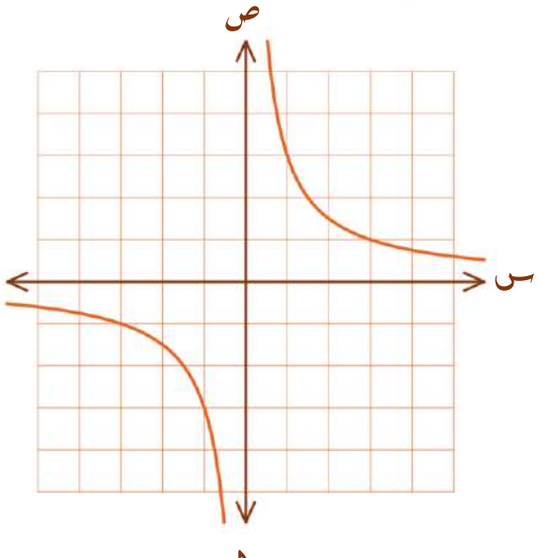
ص = أ $\sqrt{\text{س}}$: أ < ٠



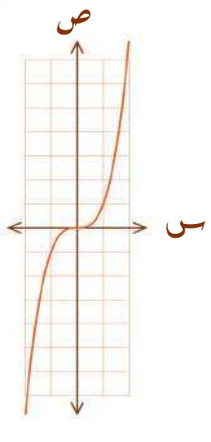
ص = أ $\sqrt{\text{س}}$: أ > ٠



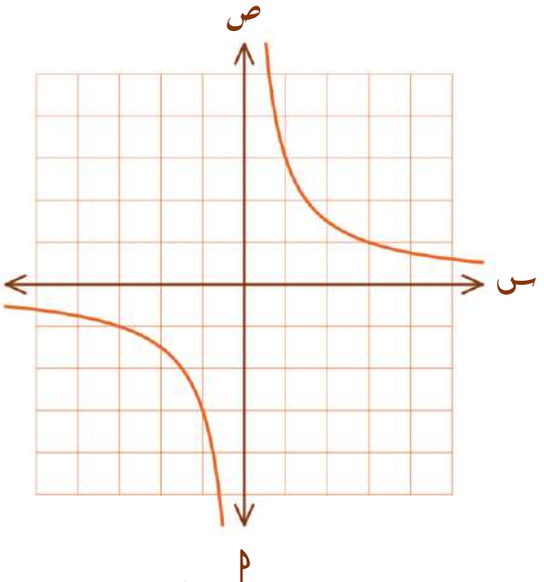
ص = م س^{٣} : م < ٠



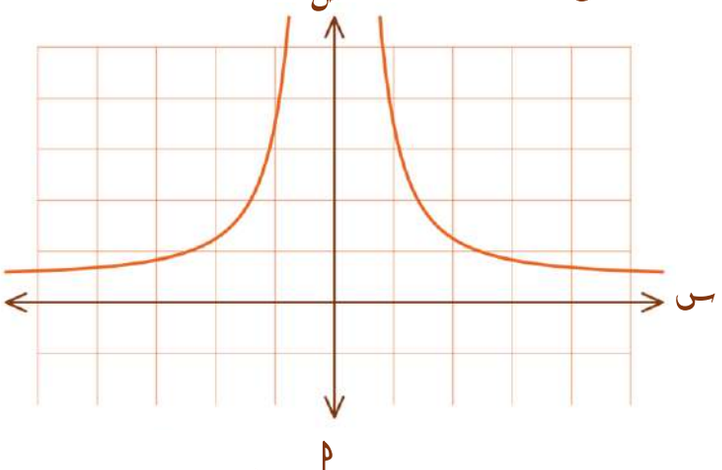
ص = $\frac{م}{س}$: م < ٠



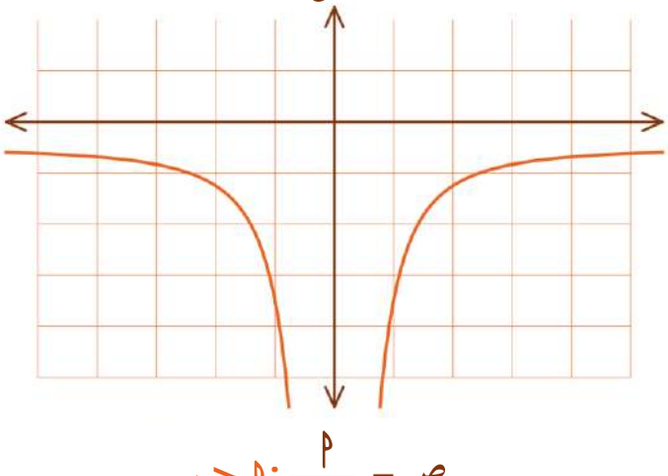
ص = م س^{٣} : م > ٠



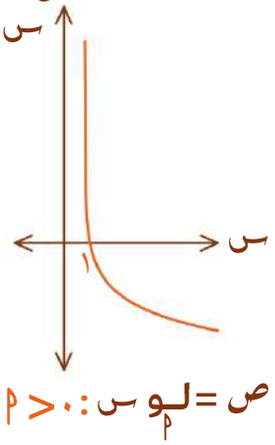
ص = $\frac{م}{س}$: م > ٠



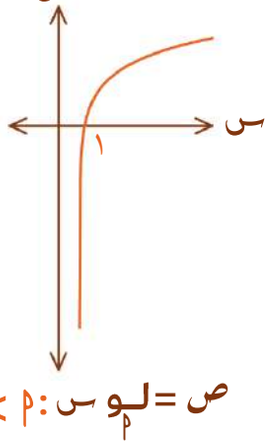
ص = $\frac{م}{س^{٢}}$: م < ٠



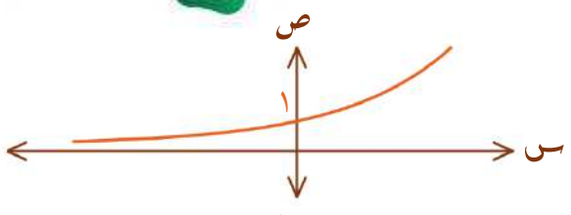
ص = $\frac{م}{س^{٢}}$: م > ٠



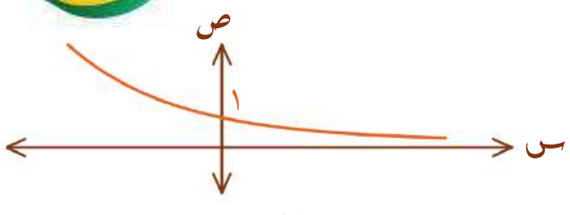
ص = لـو$_{م}$ س : ٠ < م < ١



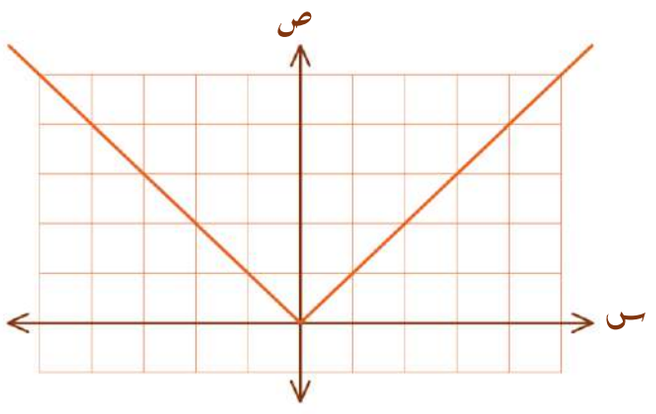
ص = لـو$_{م}$ س : م > ١



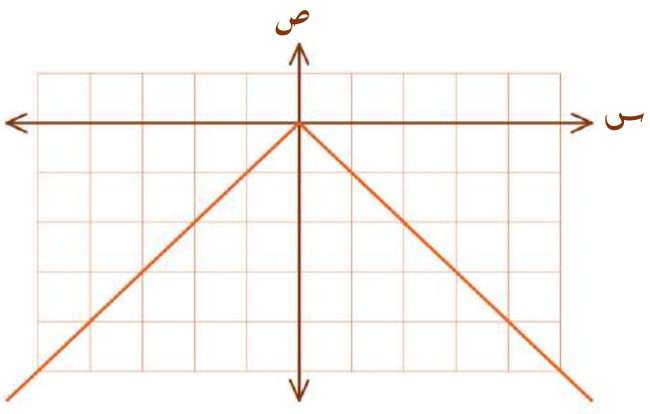
ص = أ^{س} : أ > ١



ص = أ^{س} : ٠ < أ < ١

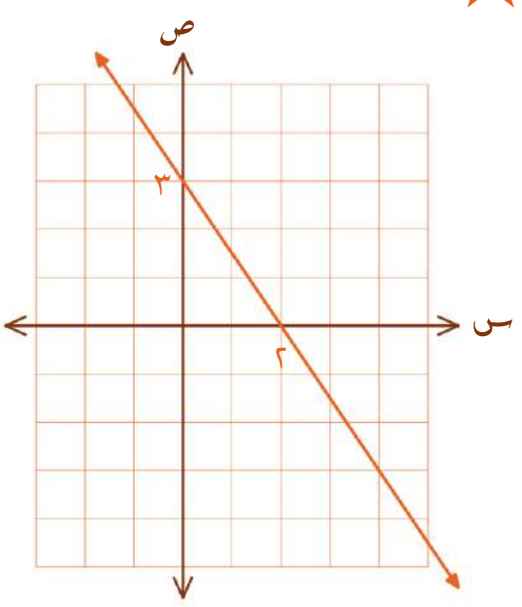


ص = أ|س| : أ > ٠

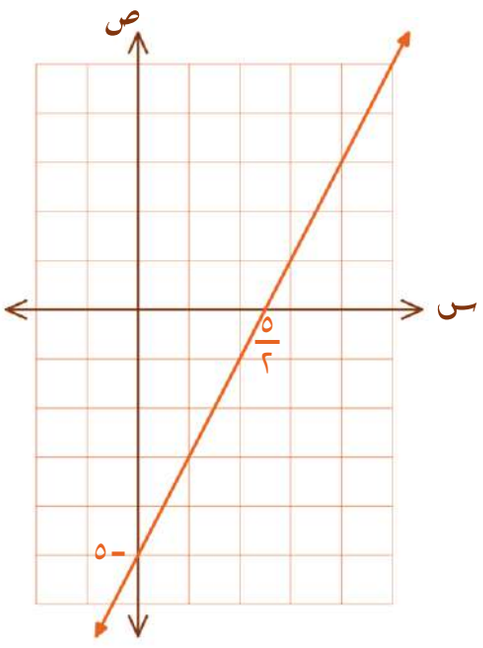


ص = أ|س| : أ < ٠

★ لرسم الخط المستقيم نحتاج فقط نقطتي تقاطعه مع محوري س ، ص



٢ص + ٣س = ٦



ص = ٢س - ٥

★ لرسم الدالة التربيعية نحتاج فقط نقطة رأس المنحنى (النقطة الحرجة) وكنا بنحسبها عن طريق إيجاد المشتقة الأولى ثم نساويها بالصفر + إشارة معامل س^{٢} + نقط التقاطع مع س ، ص

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

قوانين المتسلسلة الحسابية والهندسية

المتسلسلة الحسابية: هي مجموع حدود المتتابعة الحسابية

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{ن}{2}(أ + ل)$$

- ل: الحد الأخير
- أ: الحد الأول
- ن: عدد الحدود

إزاي أعرف انها حسابية

أي حد – الي قبله = مقدار ثابت (ء)

المتسلسلة الهندسية: هي مجموع حدود المتتابعة الهندسية

إزاي أحسب المجموع

لو متتهية

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{ل \times ر - أ}{ر - 1}$$

- ل: الحد الأخير
- ر: الأساس
- أ: الحد الأول

لو غير متتهية

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{أ}{1 - ر}$$

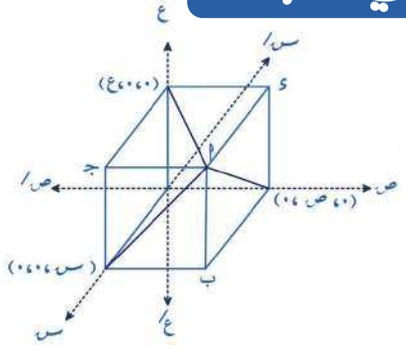
إزاي أعرف انها هندسية

$$\frac{\text{أي حد}}{\text{اللي قبله}} = \text{مقدار ثابت (ر)}$$

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

أولاً : المستوى الإحداثي المتعامد ثلاثي الأبعاد

(أ) ٣ محاور متعامدة مثنى مثنى :



- معادلة محور س هي : ص = ٠ ، ع = ٠
  وأي نقطة عليه تكون (س ، ٠ ، ٠)
- معادلة محور ص هي : س = ٠ ، ع = ٠
  وأي نقطة عليه تكون (٠ ، ص ، ٠)
- معادلة محور ع هي : س = ٠ ، ص = ٠ وأي نقطة عليه تكون (٠ ، ٠ ، ع)

تتقاطع المحاور الثلاثة في نقطة الأصل (٠،٠،٠) [$\overleftrightarrow{س س'} \cap \overleftrightarrow{ص ص'} \cap \overleftrightarrow{ع ع'} = \{ و \}$]

- متجه اتجاه محور س هو (١،٠،٠) ، متجه اتجاه محور ص هو (٠،١،٠) ، متجه اتجاه محور ع هو (٠،٠،١)
- لإيجاد تقاطع أي حد مع
  - محور س : نعوض في معادلته عن ص = ٠ ، ع = ٠
  - محور ص : نعوض في معادلته عن ع = ٠ ، س = ٠
  - محور ع : نعوض في معادلته عن س = ٠ ، ص = ٠
- أي مستقيم بيوازي محور تكون معادلته شبه معادلة المحور يعني مثلًا :
  المستقيم س = ١ ، ص = ٢ هو مستقيم // محور ع

(ب) ٣ مستويات إحداثية :

(المستويات س ص ، س ع ، ص ع
تسمى مستويات الإحداثيات أو
المستويات الإحداثية)

- المستوى س ص :
  وأي نقطة عليه تكون (س ، ص ، ٠) ومعادلته ع = ٠
- المستوى س ع : وأي نقطة عليه تكون (س ، ٠ ، ع) ، ومعادلته ص = ٠
- المستوى ص ع : وأي نقطة عليه تكون (٠ ، ص ، ع) ، ومعادلته س = ٠
- تتقاطع المستويات الثلاثة معًا في نقطة الأصل [س ص ∩ س ع ∩ ص ع = { و }]
- س ص ∩ س ع = $\overleftrightarrow{س س'}$ ، س ع ∩ ص ع = $\overleftrightarrow{ع ع'}$ ، ص ع ∩ س ص = $\overleftrightarrow{ص ص'}$
- قياس الزاوية بين أي مستويين منهما ٩٠°
- محور س ⊥ المستوى ص ع ، محور ص ⊥ المستوى س ع ، محور ع ⊥ المستوى س ص
- المتجه العمودي على
  - المستوى س ص هو (٠،٠،١)
  - المستوى س ع هو (٠،١،٠)
  - المستوى ص ع هو (١،٠،٠)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

إذا كانت أ ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) : (بُعد عمودي / أقصر بُعد)

(أ) بُعد النقطة أ عن :

- المستوى س ص = $|ع_1|$
- المستوى ص ع = $|س_1|$
- المستوى س ع = $|ص_1|$

كتعميم: بُعد النقطة عن مستوى إحداثي = | الباقى |

(ب) بُعد النقطة أ عن : (بُعد عمودي / أقصر بُعد)

- محور ع = $\sqrt{س_1^2 + ص_1^2}$
- محور س = $\sqrt{ص_1^2 + ع_1^2}$
- محور ص = $\sqrt{س_1^2 + ع_1^2}$

كتعميم: بُعد النقطة عن محور = $\sqrt{}$ مجموع مربعات الباقى

(جـ) بُعد النقطة أ عن ب ($س_2$ ، $ص_2$ ، $ع_2$) :

- طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$

وهنا الترتيب بتاع الطرح مش مهم علشان فيه تربيع

احداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$:

- إذا كانت أ ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$ ، $ع_2$) ، وكانت جـ منتصف $\overline{أب}$ فإن :

$$\overrightarrow{جـ} = \frac{\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}}{2} = \left(\frac{س_2 + س_1}{2} ، \frac{ص_2 + ص_1}{2} ، \frac{ع_2 + ع_1}{2} \right)$$

ملاحظات :

- إذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ فإن : $\overrightarrow{جـ} = \frac{\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}}{2}$ ومنها $\overrightarrow{أ} = 2\overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب} = 2\overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ}$
- يمكن إستخدام قانون البُعد بين نقطتين لإثبات ما إذا كانت : مجموعة نقط على إستقامة واحده أو رؤوس مثلث (أيا كان نوعه) أو رؤوس مربع ..... إلخ

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

نقطة تلاقي متوسطات Δ :

إذا كان أ ب جـ مثلث رؤوسه النقط : أ (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢) ، جـ (س٣ ، ص٣ ، ع٣) ، فإذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب جـ فإن :

$$م = \left(\frac{س_1 + س_2 + س_3}{3} ، \frac{ص_1 + ص_2 + ص_3}{3} ، \frac{ع_1 + ع_2 + ع_3}{3} \right)$$

ملاحظات :

- **مسقط أ (س١ ، ص١ ، ع١) على محور أ، مستوى إحداثي**

  صفّر المختلف .

- **صورة النقطة أ (س١ ، ص١ ، ع١) بالانعكاس في محور أ، مستوى إحداثي**

  غير إشارة المختلف .

لاحظ :

(1) صورة أ بالدوران ١٨٠° حول محور س مثلا هو هو صورة أ بالانعكاس في محور س وهكذا .....

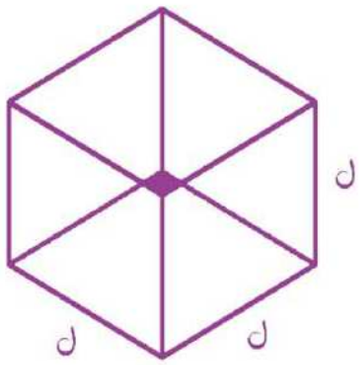
(2) صورة أ (س١ ، ص١ ، ع١) بالانعكاس في نقطة الأصل هي (− س١ ، − ص١ ، − ع١)

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

خواص بعض الأشكال

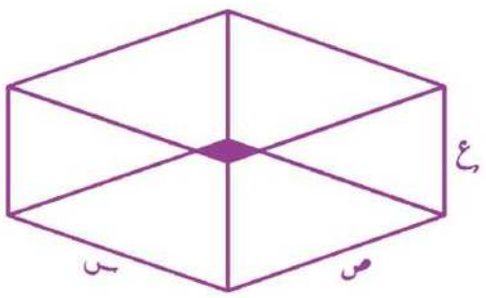
★ المكعب : (٦ مربعات)

هو عبارة عن ٦ أوجه (٤ جوانب + قاعدة وغطاء)



- المساحة الجانبية = ٤ ل^{٢}
- المساحة الكلية = ٦ ل^{٢}
- الحجم = ل^{٣}

★ متوازي المستطيلات : (٦ مستطيلات)

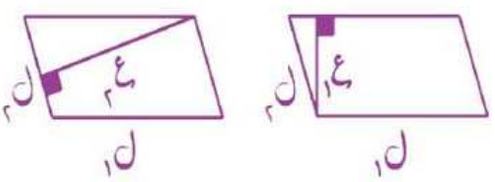


- المساحة الجانبية = ٢ ع (س + ص)
- المساحة الكلية = ٢(س ص + س ع + ص ع)
- الحجم = س ص ع

★ متوازى الأضلاع :

- المحيط = ٢ (ل$_{١}$ + ل$_{٢}$)
- المساحة = ل$_{١}$ ع$_{١}$ = ل$_{٢}$ ع$_{٢}$

= طول القاعدة × الارتفاع المناظر لها



★ كل زاويتين متقابلتين متساويتين

وكل زاويتين متجاورتين متكاملتين

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK

ثانيًا : ملخص المتجهات في الفراغ :

(1) متجه الموضع

إذا كانت أ (س١ ، ص١ ، ع١) نقطة ∈ ح٣ فإن :

متجه موضع $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و أ} = \overrightarrow{أ} =$ (س١ ، ص١ ، ع١)

مركبات المتجه أ في اتجاه المحاور

(مش احداثيات المتجه أ) لفظ لا يجوز

أي أن : متجه الموضع لنقطة هو القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة . (وهنا بيكون مركبات المتجه أ هي نفسها إحداثيات النقطة أ)

(2) المتجه الممثل بطرفي قطعة مستقيمة

$\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{أ ب}$: هو القطعة المستقيمة الموجهة $\overline{أ ب}$ التي بدايتها أ ،

ونهايتها ب واتجاهها من أ إلى ب ← المتجه هو ضلع له اتجاه

(3) الصور المختلفة للمتجه

يمكن كتابة المتجه إما : (1) بالصورة الإحداثية : $\overrightarrow{أ} =$ (س١ ، ص١ ، ع١)

(2) بالصورة الجبرية (بدلالة متجهات الوحدة الأساسية أو اليمينية) :

$\overrightarrow{أ} = س_١ \overrightarrow{س} + ص_١ \overrightarrow{ص} + ع_١ \overrightarrow{ع}$ حيث : $\overrightarrow{س}$ (١ ، ٠ ، ٠) ، $\overrightarrow{ص}$ (٠ ، ١ ، ٠) ، $\overrightarrow{ع}$ (٠ ، ٠ ، ١)

(4) معيار المتجه

إذا كان : $\overrightarrow{أ} =$ (س١ ، ص١ ، ع١) فإن : $|| \overrightarrow{أ} || = \sqrt{س_١^2 + ص_١^2 + ع_١^2}$

، حيث $|| \overrightarrow{أ} ||$ يعبر عن طول القطعة المستقيمة $\overline{و أ}$ او البعد بين النقطتين أ ، و

أو $|| \overrightarrow{أ} || = \sqrt{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{أ}}$ ← زى ما هنشوف بعد كدة

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

لاحظ : • $||\overrightarrow{أب}||$ معيار المتجه $\overrightarrow{أب}$ هو طول القطعة المستقيمة $\overline{أب}$

• $||\overrightarrow{بجـ}||$ = البعد بين نقطتين ب، جـ أو طول $\overline{بجـ}$ ومنها

فإن : $||\overrightarrow{بجـ}|| = ||\overrightarrow{جـب}||$ بينما $\overrightarrow{بجـ} = -\overrightarrow{جـب}$ (الاتجاه عكس الاتجاه)

• $\overrightarrow{أى} = -\overrightarrow{ىأ}$ ولهما نفس المعيار ← لما تبدل حروف المتجه بنعكس الاتجاه ولما نعكس الاتجاه رياضيًا

معناها نضرب × −١ أو نغير الإشارة

خواص المعيار :

• $||\overrightarrow{أ}|| \geq ٠$ ← [$||\overrightarrow{أ}|| = ٠$ إذا كان $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$]

• $||ك\overrightarrow{أ}|| = |ك| \, ||\overrightarrow{أ}||$ ← [حيث $ك \in ح^*$] [الرقم بيطلع من المعيار بقيمته المطلقة]

• $||\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}|| \neq ||\overrightarrow{أ}|| + ||\overrightarrow{ب}||$ بينما $||\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}|| \geq ||\overrightarrow{أ}|| + ||\overrightarrow{ب}||$

• $||\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}|| = ||\overrightarrow{أ}|| + ||\overrightarrow{ب}||$ إذا كان $\overrightarrow{أ}$، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان ولهما نفس الاتجاه فقط

• وبصفة عامة : $||\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}|| = \sqrt{||\overrightarrow{أ}||^٢ + ||\overrightarrow{ب}||^٢ + ٢||\overrightarrow{أ}|| \, ||\overrightarrow{ب}|| \, جتا\theta}$

(5) متجه الوحدة

(1) متجه الوحدة هو أي متجه معياره واحد

(2) متجه الوحدة في اتجاه معلوم

• متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ} = ى_{\overrightarrow{أ}} = \dfrac{\overrightarrow{أ}}{||\overrightarrow{أ}||}$

← جيوب تمام اتجاه $\overrightarrow{أ}$

• متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{بجـ} = ى_{\overrightarrow{بجـ}} = \dfrac{\overrightarrow{بجـ}}{||\overrightarrow{بجـ}||}$

← جيوب تمام اتجاه $\overrightarrow{بجـ}$

لاحظ : • إذا كان $\overrightarrow{أ}$ متجه يعمل في اتجاه $\overrightarrow{بجـ}$ ($\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{بجـ}$ وفي نفس اتجاهه)

فإن : $\overrightarrow{أ} = ||\overrightarrow{أ}|| \, ى_{\overrightarrow{بجـ}}$

$\therefore \overrightarrow{أ} = ||\overrightarrow{أ}|| \dfrac{\overrightarrow{بجـ}}{||\overrightarrow{بجـ}||}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

• إذا كان $\overrightarrow{ق}$ قوة تعمل في اتجاه $\overrightarrow{ب ى}$ ($\overrightarrow{ق}$ // $\overrightarrow{ب ى}$ وفي نفس اتجاهه)

فإن : $\overrightarrow{ق} = ||\overrightarrow{ق}|| \, \hat{ب ى} = ||\overrightarrow{ق}|| \dfrac{\overrightarrow{ب ى}}{||\overrightarrow{ب ى}||}$

(6) زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه :

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور س، محور ص، محور ع زوايا قياساتها $\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$ على الترتيب فإن $\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$ تسمى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ حيث :

$$\theta_س \in [\, ٠ ، \pi \,] \;،\; \theta_ص \in [\, ٠ ، \pi \,] \;،\; \theta_ع \in [\, ٠ ، \pi \,]$$

كما أن : (جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$) تسمى جيوب تمام (زوايا) الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

ويكون :

• $\hat{م} = ($ جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$ $) = \dfrac{\overrightarrow{أ}}{||\overrightarrow{أ}||}$

• $\overrightarrow{أ} = ||\overrightarrow{أ}|| \, \hat{م} = ||\overrightarrow{أ}|| \,($ جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$ $)$

• **القانون الشقى :**

• جتا$^٢ \theta_س$ + جتا$^٢ \theta_ص$ + جتا$^٢ \theta_ع = ١$ (جا$^٢ \theta_س$ + جا$^٢ \theta_ص$ + جا$^٢ \theta_ع = ٢$)

بس الأفضل الحل بـ قانون الجتا علشـــــان تقدر منه تحدد نوع الزاوية

لاحظ : إذا كانت $\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$ زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ وكان : $\overrightarrow{ب} = ك \overrightarrow{أ}$ [$\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$]

• إذا كانت ك > ٠ فإن : $\overrightarrow{ب}$ له نفس زوايا اتجاه $\overrightarrow{أ}$

[$\overrightarrow{ب}$ أيضًا له نفس جيوب تمام اتجاه $\overrightarrow{أ}$]

• إذا كانت ك < ٠ فإن : $\overrightarrow{ب}$ تكون زوايا اتجاهه هي : ($\pi - \theta_س$ ، $\pi - \theta_ص$ ، $\pi - \theta_ع$)

[جيوب تمام اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = − جيوب تمام اتجاه $\overrightarrow{أ}$]

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظات :

إذا كان $\vec{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع$ زوايا الاتجاه لـ $\vec{أ}$ فإن :

• جتا $\theta_س = \frac{أ_س}{||\vec{أ}||}$ • جتا $\theta_ص = \frac{أ_ص}{||\vec{أ}||}$ • جتا $\theta_ع = \frac{أ_ع}{||\vec{أ}||}$

قواعد يمكن من خلالها إيجاد : $\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع$ مباشرة

(قانون بيجيب كل زاوية على حدة)

• قياس الزاوية التي يصنعها المتجه مع مستويات الاحداثيات س ص ، س ع ، ص ع

تساوي : $٩٠ - \theta_ع ، ٩٠ - \theta_ص ، ٩٠ - \theta_س$ بالترتيب

• إذا كانت $\theta_س + \theta_ص = ٩٠°$ فإن : $\theta_ع = ٩٠°$

∴ المتجه ⊥ محور ع يوازي أو يقع في المستوى س ص

• إذا كانت $\theta_س + \theta_ع = ٩٠°$ فإن : $\theta_ص = ٩٠°$

∴ المتجه ⊥ محور ص يوازي أو يقع في المستوى س ع

• إذا كانت $\theta_ص + \theta_ع = ٩٠°$ فإن : $\theta_س = ٩٠°$

∴ المتجه ⊥ محور س يوازي أو يقع في المستوى ص ع

• زوايا اتجاه أي متجه يعمل في اتجاه $\overrightarrow{وس}$ هي (٠° ، ٩٠° ، ٩٠°)

زوايا اتجاه أي متجه يعمل في اتجاه $\overleftarrow{وس}$ هي (١٨٠° ، ٩٠° ، ٩٠°)

• زوايا اتجاه أي متجه يعمل في اتجاه $\overrightarrow{وص}$ هي (٩٠° ، ٠° ، ٩٠°)

زوايا اتجاه أي متجه يعمل في اتجاه $\overleftarrow{وص}$ هي (٩٠° ، ١٨٠° ، ٩٠°)

• زوايا اتجاه أي متجه يعمل في اتجاه $\overrightarrow{وع}$ هي (٩٠° ، ٩٠° ، ٠°)

زوايا اتجاه أي متجه يعمل في اتجاه $\overleftarrow{وع}$ هي (٩٠° ، ٩٠° ، ١٨٠°)

إذا كان المتجه يصنـــــع زوايا متساوية مع المحاور

فإن: مركباته جميعها متساوية

جيوب تمـــام اتجاهه هي $\pm \left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} \right)$

WWW.JAWACADEMY.NET WWW.MRAHMEDESSAM.COM ENG/AHMED ESSAM ELDIN ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

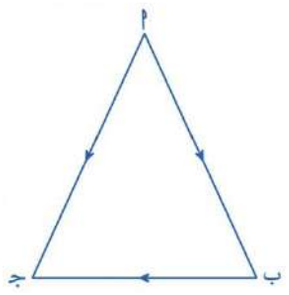
(7) العمليات على المتجهات

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (س_1، ص_1، ع_1)$ ، $\overleftarrow{ب} = (س_2، ص_2، ع_2)$ فإن :

- $ك\overleftarrow{أ} = (ك س_1، ك ص_1، ك ع_1)$ ، $ك \in ح^*$
- $\overleftarrow{أ} \pm \overleftarrow{ب} = (س_1 \pm س_2، ص_1 \pm ص_2، ع_1 \pm ع_2)$
- إذا كان : $\boxed{\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{ب}}$ فإن : $س_1 = س_2$ ، $ص_1 = ص_2$ ، $ع_1 = ع_2$

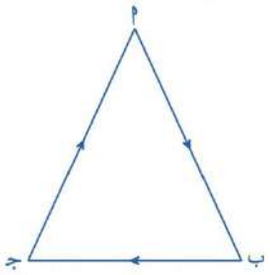
[$\overleftarrow{أ}$ يكافئ $\overleftarrow{ب}$] لهما نفس المعيار ونفس الاتجاه

(8) العمليات على المتجهات هندسيًا



$\overleftarrow{أجـ} = \overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بجـ}$ أو

$\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{أجـ} - \overleftarrow{بجـ}$

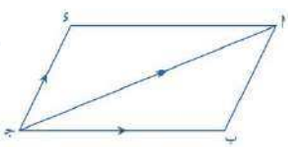


$\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بجـ} + \overleftarrow{جـأ} = \overleftarrow{0}$

+ : ثم

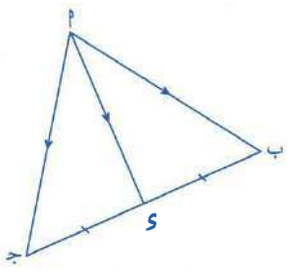
– : اعكس الاتجاه

= : يكافئ (كافئ)

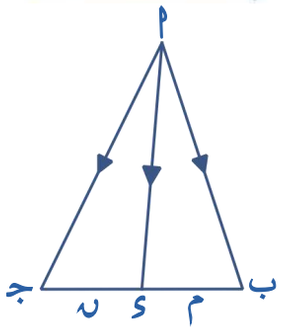


$\overleftarrow{جـب} + \overleftarrow{جـء} = \overleftarrow{جـأ}$

$\overleftarrow{جـء}$ يكافئ $\overleftarrow{بأ}$

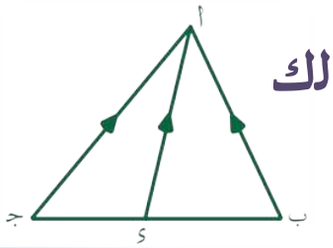


$\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{أجـ} = ٢\overleftarrow{أء}$



$م\overleftarrow{أجـ} + ن\overleftarrow{أب} = (م + ن)\overleftarrow{أء}$

خد بالك



$\overleftarrow{بأ} + \overleftarrow{جـأ} = ٢\overleftarrow{ءأ}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٦ ضرب المتجهات :

	الضرب القياسي	الضرب الاتجاهي	الضرب الثلاثي القياسي
التعريف	عملية تتم على متجهين والناتج منها رقم .	عملية تتم على متجهين وينتج عنها أحد المتجهات العمودية على مستواهم .	عملية تتم على ٣ متجهات والناتج منها رقم .
الرمز	$\vec{أ} \cdot \vec{ب}$	$\vec{أ} \times \vec{ب}$	$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ}$
القانون	• $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, جتا\theta$ $= س_1 س_2 + ص_1 ص_2 + ع_1 ع_2$ لاحظ: هي الزاوية بين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\theta \in [0° ، \pi]$ ولازم يكونوا خارجين منها أ، داخلين فيها	• $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, جا\theta$ • $\vec{أ} \times \vec{ب} = \pm \|\vec{أ} \times \vec{ب}\| \, \hat{ن}$ $= \pm \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, جا\theta \, \hat{ن}$ $= \begin{vmatrix} س_{\hat{ن}} & ص_{\hat{ن}} & ع_{\hat{ن}} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$ لاحظ: إذا كان : $\vec{أ}$ ($س_1$ ، $ص_1$)، $\vec{ب}$ ($س_2$ ، $ص_2$) فإن : $\vec{أ} \times \vec{ب} = (س_1 ص_2 - س_2 ص_1) \, \hat{ع}$	(١) يدويًا : يتم تنفيذ $\vec{ب} \times \vec{جـ}$ أولاً والناتج نقوم بضربه قياسيًا مع $\vec{أ}$ (٢) من القانون : $\begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$
الخواص	• $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \vec{ب} \cdot \vec{أ}$ • $(ك \vec{أ}) \cdot (م \vec{ب}) = ك م (\vec{أ} \cdot \vec{ب})$ • $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = 0$ إذا كان : $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ أ، $\vec{أ} = \vec{و}$ أ، $\vec{ب} = \vec{و}$ • $\vec{أ} \cdot \vec{أ} = \|\vec{أ}\|^2$ ومنها : $\|\vec{ك}\| = \sqrt{\vec{ك} \cdot \vec{ك}}$ • $\vec{أ} \cdot (\vec{ب} + \vec{جـ}) = \vec{أ} \cdot \vec{ب} + \vec{أ} \cdot \vec{جـ}$ ومنها نقدر ناخد عامل مشترك	• $\vec{أ} \times \vec{ب} = -\vec{ب} \times \vec{أ}$ • $(ك \vec{أ}) \times (م \vec{ب}) = ك م (\vec{أ} \times \vec{ب})$ • $\vec{أ} \times (\vec{ب} + \vec{جـ}) = \vec{أ} \times \vec{ب} + \vec{أ} \times \vec{جـ}$ مع مراعاة الترتيب وعليه يمكن أخذ عامل مشترك • $\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{و}$ إذا كان : $\vec{أ} // \vec{ب}$ أو أحدهما هو المتجه الصفري	• $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ}$ $= \vec{أ} \times \vec{ب} \cdot \vec{جـ}$ • $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ}$ $= \vec{جـ} \cdot \vec{أ} \times \vec{ب}$ $= \vec{ب} \cdot \vec{جـ} \times \vec{أ}$ $= -\vec{جـ} \cdot \vec{ب} \times \vec{أ}$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

الخواص

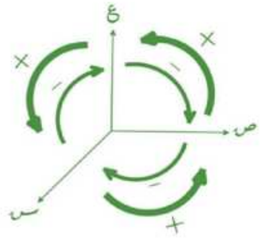
- الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة الأساسية :

$\vec{س} \times \vec{ص} = \vec{ع}$

$\vec{ص} \times \vec{ع} = \vec{س}$

$\vec{ع} \times \vec{س} = \vec{ص}$

الغسالة (1)



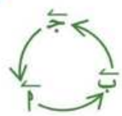
شكل يبسط حفظ الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة الأساسية .

$= -\vec{ب} \cdot \vec{أ} \times \vec{جـ}$

$= -\vec{أ} \cdot \vec{جـ} \times \vec{ب}$

ويمكن تبسيطها من :

الغسالة (2)



الاستخدامات

- تحديد نوع الزاوية بين متجهين : من إشارة الضرب القياسي :

(١) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} > 0$ الزاوية حادة

(٢) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = 0$ الزاوية قائمة

(٣) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} < 0$ الزاوية منفرجة

- إيجاد الزاوية بين متجهين :

$جتا\, \theta = \frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|}$

- حساب الشغل : $شـ = \vec{ق} \cdot \vec{ف}$
- إيجاد المركبة الجبرية والاتجاهية :

مركبة $\vec{أ}$ في اتجاه $\vec{ب}$

$أ_{ب} = \|\vec{أ}\| \, جتا\, \theta = \frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{ب}\|}$

المركبة الاتجاهية لـ $\vec{أ}$ في اتجاه $\vec{ب}$

$= \left(\frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{ب}\|^2}\right) \vec{ب} = أ_{ب}\, \vec{ى}_{ب}$

- حساب مساحة المثلث :

$م \Delta = \frac{1}{2}$ || الضرب الاتجاهي لأي ضلعين في المثلث ||

- حساب مساحة متوازي الأضلاع :

$م \square =$ || الضرب الاتجاهي لأي ضلعين متجاورين في المتوازي ||

لاحظ : مساحة أي شكل رباعي (بما فيهم متوازي الأضلاع)

$= \frac{1}{2}$ || الضرب الاتجاهي لأي قطرين ||

- الكشف عن توازي متجهين : $\vec{أ} // \vec{ب}$

فإن : (١) $\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{و}$

(٢) $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

(٣) $\vec{أ} = ك\, \vec{ب}$

- $ك > 0$ في نفس الاتجاه
- $ك < 0$ متضادان في الاتجاه
- إيجاد متجه الوحدة العمودي على المستوى

$\vec{ى} = \pm \frac{\vec{أ} \times \vec{ب}}{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|}$

- حساب حجم وارتفاع متوازي السطوح :

$ح = |\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ}|$

$ع = \frac{ح}{مساحة\ القاعدة}$

$= \frac{|\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ}|}{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|}$

إذا كانت القاعدة محددة بـ $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

- الكشف عن ما إذا كان ٣ متجهات أو ٤ نقط في مستوى واحد أم لا :

(١) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ}$

$= 0$: $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{جـ}$ في مستوى واحد

$\neq 0$: $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{جـ}$ مش في مستوى واحد

(٢) $\vec{أب} \cdot \vec{بجـ} \times \vec{جـء}$

$= 0$: أ ، ب ، جـ ، ء في مستوى واحد

$\neq 0$: أ ، ب ، جـ ، ء مش في مستوى واحد

ملاحظات عامة على ضرب المتجهات :

- إذا كان $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ ، $\vec{أ} \perp \vec{جـ}$ فإن : $\vec{أ} // \vec{ب} \times \vec{جـ}$
- $جا\, \theta = \frac{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|}$
- $ظا\, \theta = \frac{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|}{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}$
- $\vec{أ} \cdot \vec{س} = \|\vec{أ}\| \, جتا\, \theta_س = أ_س$ ، $\vec{أ} \cdot \vec{ص} = \|\vec{أ}\| \, جتا\, \theta_ص = أ_ص$ ، $\vec{أ} \cdot \vec{ع} = \|\vec{أ}\| \, جتا\, \theta_ع = أ_ع$

$\|\vec{أ} \times \vec{س}\| = \|\vec{أ}\| \, جا\, \theta_س$ ، $\|\vec{أ} \times \vec{ص}\| = \|\vec{أ}\| \, جا\, \theta_ص$ ، $\|\vec{أ} \times \vec{ع}\| = \|\vec{أ}\| \, جا\, \theta_ع$

- إذا كانت $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{جـ}$ متجهات متعامدة مثنى مثنى فإن :

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ} = \pm \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, \|\vec{جـ}\|$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الوحدة الأولى هندسة فراغية

أولًا : أهم أسئلة الاختيار من متعدد

1 إذا كان : $\overrightarrow{ج} = ٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$،
$\overrightarrow{ى} = ٢\overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ وكان : $٣\overrightarrow{أ} - ٤\overrightarrow{ى} = \overrightarrow{ج}$
فإن : $||\overrightarrow{أ}|| =$ .....

(أ) $\frac{\sqrt{٧٨}}{٣}$ (ب) $\frac{\sqrt{٨٧}}{٣}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٧٥}}{٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٥٧}}{٣}$

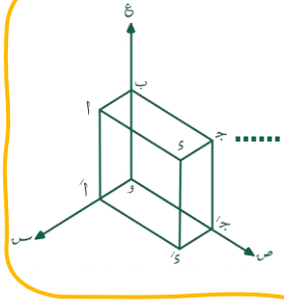
2 إذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -٦٥\overrightarrow{ى}$ وكان $||\overrightarrow{أ}|| = ٥$، $||\overrightarrow{ب}|| = ٢٦$
فإن : قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$، $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٥٠° (د) أ، جـ معًا

3 إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-٢، ٢، ١)$، $\overrightarrow{ب} = (٣، ١، -٢)$
فإن جيوب تمام اتجاه $\overrightarrow{أب}$ هي .....

(أ) $(\frac{٥}{٣٥}، \frac{-١}{٣٥}، \frac{-٣}{٣٥})$
(ب) $(\frac{١}{٣٥}، \frac{-٥}{٣٥}، \frac{-٣}{٣٥})$
(جـ) $(\frac{٣}{٣٥}، \frac{-٥}{٣٥}، \frac{١}{٣٥})$
(د) $(\frac{١}{٣٥}، \frac{-٥}{٣٥}، \frac{٣}{٣٥})$

4 إذا كان الشكل المقابل
يمثل متوازي مستطيلات
فيه د (٣، ٥، ٤) فإن : $\overrightarrow{جـ}$ = ...



(أ) (٥، ٤، ٠) (ب) (٤، ٠، ٠)
(جـ) (٣، ٥، ٠) (د) (٤، ٥، ٠)

5 إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣، ١، -٢)$، فإن جيب تمام الزاوية التي يصنعها $\overrightarrow{أ}$ مع الاتجاه الموجب لمحور ص = ...

(أ) $\frac{٣}{\sqrt{١٤}}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{١٤}}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{١٤}}$ (د) $\sqrt{١٤}$

6 إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (١، م، -٢)$، $\overrightarrow{ب} = (٤، ١٧، ٢)$
وكان $||\overrightarrow{أب}|| = ١٣$، فإن : م ∈ .....

(أ) {٥، ٢٩} (ب) {٥}
(جـ) {٢٩} (د) {٢٤، ٢٩}

7 إذا كانت النقطة جـ منتصف $\overline{أب}$ حيث
أ (-١، ٤، -٥)، ب (٣، ٢، -٣)، فإن بعد النقطة جـ عن المحور س = ... وحدة طول

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

8 إذا كانت النقطة (٣، م+٥، ل+١) تبعد عن المستوى س ص بمقدار ٥ وحدات وتبعد عن المستوى س ع بمقدار وحدة واحدة، فإن بعدها عن محور السينات = ... وحدة طول

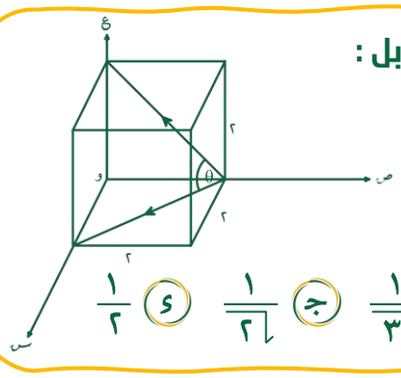
(أ) $\sqrt{٢٦}$ (ب) ٣ (جـ) $\sqrt{١٠٦}$ (د) ٦

9 إذا كانت النقطة (ك، ٣، -٢) تقع على بعدين متساويين من المحورين س، ص فإن : ك = ...

(أ) ±٢ (ب) ±٣ (جـ) ±٤ (د) ±٥

26

10 في الشكل المقابل :



جتا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{١}{٢}$

26

11 أ ب جـ د مستطيل فيه أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم ،
فإن : $\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{د جـ}$ = ...

(أ) −٨٠ (ب) −٣٦ (جـ) ٣٦ (د) ٨٠

12 إذا كانت أ ∈ محور س ، ب ∈ محور ص ، جـ ∈ محور ع وكانت النقطة (١ ، −١ ، ٠) منتصف $\overline{أ ب}$ ، والنقطة (٠ ، ٠ ، −١) منتصف $\overline{ب جـ}$ ،
فإن : إحداثيات منتصف $\overline{أ جـ}$ هي .....

(أ) (١ ، ٠ ، ٢) (ب) (٢ ، ٠ ، ١)
(جـ) (١ ، ٠ ، ٢) (د) (٠ ، ٢ ، ١)

13 إذا كان ٣٠° ، ٧٠° ، θ هي زوايا الاتجاه لمتجه فإن
إحدى قيم θ = ...°

(أ) ١٠٠ (ب) ٨٠ (جـ) ٢٦٠ (د) ٦٨,٦١

14 إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (−١ ، ٥ ، −٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ١ ، ١)
وكان $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{س}$ فإن : $\overrightarrow{جـ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{س} + ٦\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ (ب) $-\overrightarrow{س} - ٦\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$
(جـ) $\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} - ٣\overrightarrow{ع}$ (د) $\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$

15 الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ الذي معياره ٥ وحدات ويصنع مع محاور الإحداثيات زوايا اتجاه متساوية في القياس هي .....

(أ) $(\frac{٥}{\sqrt{٣}} ، \frac{٥}{\sqrt{٣}} ، \frac{٥}{\sqrt{٣}})$ (ب) $(\frac{-٥}{\sqrt{٣}} ، \frac{-٥}{\sqrt{٣}} ، \frac{-٥}{\sqrt{٣}})$
(جـ) ± (٥ ، ٥ ، ٥) (د) $\pm (\frac{٥}{\sqrt{٣}} ، \frac{٥}{\sqrt{٣}} ، \frac{٥}{\sqrt{٣}})$

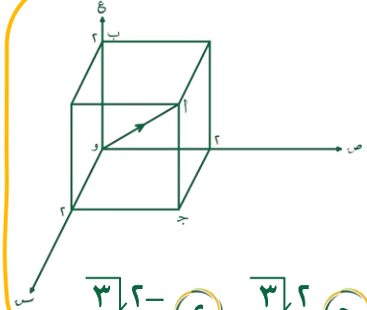
16 إذا كان أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨ سم فإن : $(٢\overrightarrow{أ ب}) \cdot (٣\overrightarrow{جـ ب})$ = ...

(أ) ١٤٨ (ب) −١٤٨ (جـ) ١٩٢ (د) −١٩٢

17 إذا كانت أ = (١ ، ٤ ، ٠) ، ب = (−١ ، ٢ ، ٣) فإن مركبة القوة $\overrightarrow{ق} = ٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ في اتجاه $\overrightarrow{أ ب}$ = ...

(أ) $\sqrt{١٧}$ (ب) $\sqrt{١٩}$ (جـ) ٥ (د) ٤

18 في الشكل المقابل :
مكعب طول ضلعه ٢
وحدة طول فإن مركبة المتجه $\overrightarrow{و أ}$ على المتجه $\overrightarrow{جـ ب}$ = ...



(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (ب) $\frac{-\sqrt{٣}}{٣}$ (جـ) $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ (د) $\frac{-٢\sqrt{٣}}{٣}$

19 إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، −٣) وكان $\overrightarrow{ب}$ // $\overrightarrow{أ}$ وكان ‖ $\overrightarrow{ب}$ ‖ = $٣\sqrt{١٣}$ فإن : $\overrightarrow{ب}$ = ... حيث $\overrightarrow{ب}$ يعمل عكس اتجاه $\overrightarrow{أ}$

(أ) (٦ ، ٩) (ب) (−٦ ، ٩)
(جـ) (٦ ، −٩) (د) (−٦ ، −٩)

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

20 إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} \times ٣\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ع} \times -٢\overrightarrow{ص}$
فإن جيوب تمام اتجاه $\overrightarrow{أ}$ هي .....
(أ) $\left(\frac{-١}{\sqrt{٧٣}}، \frac{٦}{\sqrt{٧٣}}، \frac{٦}{\sqrt{٧٣}}\right)$ (ب) $\left(\frac{٦}{\sqrt{٧٣}}، \frac{١}{\sqrt{٧٣}}، \frac{٦}{\sqrt{٧٣}}\right)$
(جـ) $\left(\frac{٦}{\sqrt{٧٣}}، \frac{٦}{\sqrt{٧٣}}، \frac{-١}{\sqrt{٧٣}}\right)$ (د) $\left(\frac{٦}{\sqrt{٧٣}}، \frac{-١}{\sqrt{٧٣}}، \frac{٦}{\sqrt{٧٣}}\right)$

21 إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهي وحدة متعامدين
فإن : $(\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب}) \cdot (٣\overrightarrow{أ} + ٥\overrightarrow{ب}) =$ .....
(أ) -٨ (ب) -٧ (جـ) ٢٤ (د) ٠

22 إذا كان $ق$ متجه وحدة عمودي على مستوى
$\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ وكان : $|| -٢\overrightarrow{أ} || = ١٢$ ، $|| -٣\overrightarrow{ب} || = ٢٤$
وقياس الزاوية بينهما $٦٠°$ فإن : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} =$ ..... $ق$
(أ) $\pm ١٦\sqrt{٣}$ (ب) $\pm ٤٨\sqrt{٣}$ (جـ) $\pm ٦\sqrt{٣}$ (د) $\pm ٢٤\sqrt{٣}$

23 إذا كان $وهو$ مثلث فيه :
$و(٤، ٠، ٣)$ ، $هـ(٢، ١، ٥)$ ، $و(-١، ٠، -١)$ فإن
مساحة المثلث $وهو$ = ... وحدة مربعة
(أ) $\sqrt{٣٦٥}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣٦٥}}{٢}$ (جـ) $٢\sqrt{٣٦٥}$ (د) $\frac{١}{٤}\sqrt{٣٦٥}$

24 إذا كانت إحداثيات نقاط متوازي الأضلاع $لمنه$ هي : $ل(١، ١)$ ، $م(٢، ٣)$ ، $ن(٥، ٤)$ فإن مساحة متوازي الأضلاع $لمنه$ هي ..... وحدة مربعة
(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ٥ (د) ٣

25 إذا كان : $|| \overrightarrow{أ} || = ٤$ ، $|| \overrightarrow{ب} || = ٢$ ، وكان :
$(\overrightarrow{أ} - ك\overrightarrow{ب}) \perp (\overrightarrow{أ} + ك\overrightarrow{ب})$ ، فإن : $ك =$ .....
(أ) $\pm \frac{١}{٤}$ (ب) $\pm \frac{١}{٢}$ (جـ) ± ٢ (د) ± ٨

26 متجه الموضع الذي يقع في المستوى الإحداثي $سص$ ويصنع زاوية قياسها $٦٠°$ مع الاتجاه الموجب لمحور $ص$ ،
فإن : جيوب تمام الاتجاه له هي .....
(أ) $(٠، \frac{١}{٢}، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ (ب) $(\frac{١}{٢}، \pm\frac{\sqrt{٣}}{٢}، ٠)$
(جـ) $(\pm\frac{\sqrt{٣}}{٢}، \frac{١}{٢}، ٠)$ (د) $(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، \pm\frac{١}{٢}، ٠)$

27 $أبجـ$ مثلث فيه $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} + ٢\overrightarrow{ع}$ ،
$\overrightarrow{بجـ} = -٢\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ ، فإن : المركبة الاتجاهية لـ $\overrightarrow{أجـ}$ في اتجاه $\overrightarrow{بجـ}$ هي .....
(أ) $(\frac{-٤}{٣}، \frac{٤}{٣}، \frac{٢}{٣})$ (ب) $(\frac{-٢}{٣}، \frac{٢}{٣}، \frac{-١}{٣})$
(جـ) $(\frac{٤}{٣}، \frac{-٤}{٣}، \frac{٢}{٣})$ (د) $(\frac{٢}{٣}، \frac{-٢}{٣}، \frac{١}{٣})$

28 $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهان وكانت مركبة $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه $\overrightarrow{ب} = ٤$
وزوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{ب}$ هي : $(٩٠°، ٦٠°، ١٥٠°)$ ،
فإن المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه $\overrightarrow{ب}$ هي .....
(أ) $(١، ٢، \sqrt{٣})$ (ب) $(٠، ٢، -\sqrt{٣})$
(جـ) $(٠، ١، ٢\sqrt{٣})$ (د) $(٠، ٢، -٢\sqrt{٣})$

29 إذا كان : $أبجـد$ متوازي أضلاع فيه :
$\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أد} = (٦، ٦، -١٠)$ ،
فإن : $|| \overrightarrow{أجـ} \times \overrightarrow{بد} || =$ .....
(أ) $\sqrt{٤٣}$ (ب) $٢\sqrt{٤٣}$ (جـ) $٤\sqrt{٤٣}$ (د) $٤\sqrt{٣٤}$

30 إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٨، ٤\sqrt{٢}، ٤\sqrt{٢})$ فإنه يصنع زاوية مع المستوى الإحداثي $سص$ قياسها ..... °
(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٧٥

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

26 إذا كانت المتجهات $\overrightarrow{أ}$، $\overrightarrow{ب}$، $\overrightarrow{جـ}$ ثلاثة أحرف مشتركة في رأس واحدة في متوازي سطوح وكان $\overrightarrow{أ} = (٢، ٠، ٢)$، $\overrightarrow{ب} = (٢، ٢، ٠)$، $\overrightarrow{جـ} = (٠، ٢، ل)$ وكان حجم متوازي السطوح = ١٦ وحدة مكعبة ، فإن : ل = ...

31

(أ) ٦ (ب) ٢أ، −٦ (جـ) ٤ (د) −٢أ، ٤

26 إذا كان : $\overrightarrow{ب} = (٣، -٤، ٤)$، $\overrightarrow{جـ} = (١، ٤، -٧)$، فإن جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}$ = ...

32

(أ) $(\frac{٤}{٥}، ٠، -\frac{٣}{٥})$ (ب) $(٠، \frac{٤}{٥}، -\frac{٣}{٥})$

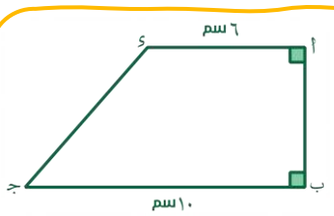
(جـ) $(-\frac{٤}{٥}، ٠، \frac{٣}{٥})$ (د) $(\frac{٤}{٥}، ٠، \frac{٣}{٥})$

26 إذا كان $\overrightarrow{ب} = (ك، ٦، ٨)$ وجيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{جـ}$ هي $(م، \frac{٣}{١٣}، \frac{٤}{١٣})$ وكان $\overrightarrow{ب} // \overrightarrow{جـ}$، فإن : ك = ...

33

(أ) ±١٢ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ±٢٤

26 في الشكل المقابل :



$\overrightarrow{ء جـ} \cdot \overrightarrow{جـ ب}$ = ...

34

(أ) ٦٠ (ب) ٤٠ (جـ) −٤٠ (د) −٦٠

26 إذا كان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |٣|، \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = س + ٢ص + ٢ع$، فإن قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$، $\overrightarrow{ب}$ = ...°

35

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

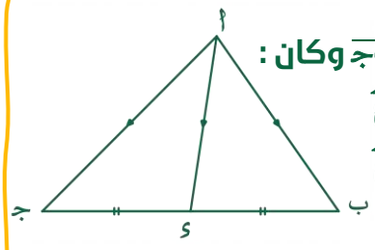
26 إذا كان : $\overrightarrow{٣أ} + ٢\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{٠}$ (حيث $\overrightarrow{٠}$ المتجه الصفري)، وكانت زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هي : $(١٢٠°، ١٢٠°، \theta°)$ ، فإن زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{ب}$ يمكن أن تكون .....

36

(أ) $(١٢٠°، ١٢٠°، ٤٥°)$ (ب) $(٦٠°، ٦٠°، ٩٠°)$

(جـ) $(٦٠°، ٦٠°، ١٣٥°)$ (د) $(١٢٠°، ١٢٠°، ١٣٥°)$

25 في الشكل المقابل :



إذا كانت ء منتصف $\overline{ب جـ}$ وكان :

$\overrightarrow{أب} = ٥س - ٢ص + ٧ع$

$\overrightarrow{أجـ} = ٣س - ٢ص + ع$

فإن : $|\overrightarrow{أء}|$ = ...

37

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

25 إذا كانت $\overrightarrow{أ}$، $\overrightarrow{ب}$، $\overrightarrow{جـ}$، $\overrightarrow{هـ}$ أربعة متجهات تقع جميعها في مستوى واحد حيث $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$، $\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$، $\overrightarrow{جـ} \times \overrightarrow{هـ} = ٣\overrightarrow{ى}$، فإن : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ = ... $\overrightarrow{ى}$

(حيث أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودي على اتجاه المستوى)

38

(أ) $-\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $-\frac{٢}{٣}$

25 إذا كان $\overrightarrow{أ} = (-٣، ٣، -٤)$، $\overrightarrow{ب} = (-٦، ٧، ٨)$، فإن جيب تمام الزاوية التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{أب}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ...

39

(أ) $\frac{٣}{١٣}$ (ب) $-\frac{٣}{١٣}$ (جـ) $-\frac{٦}{١٣}$ (د) $\frac{٧}{١٣}$

25 إذا كان المثلث الذي رؤوسه النقط $(٤، ٥، ٢)$، $(١، ك، ٣)$، $(٢، ٤، ٥)$ متساوي الأضلاع فإن : ك ∈ .....

40

(أ) $\{\frac{٢١}{٥}\}$ (ب) $\{٧\}$

(جـ) $\{٣، ٧\}$ (د) $\{٧، -\frac{٢١}{٥}\}$

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

41 إذا كانت مساحة المثلث الذي فيه : $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ضلعان متجاوران هي ٢٠ وحدة مربعة ، فإن : $|(\vec{أ}\times\vec{أ})(\vec{ب}\cdot\vec{ب})-(\vec{أ}\cdot\vec{ب})^{٢}|$ = ...

(أ) ٤٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) ٥

42 إذا كان المتجه $\vec{أ}$ = ٢س ـ ٣ص + ع ، $\vec{ب}$ = ـس + ٢ص ـ ٣ع فإن : متجه الوحدة العمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين = ...

(أ) $\pm\left(\frac{٧}{٣\sqrt{٥}},\frac{١}{٣},\frac{١}{٣\sqrt{٥}}\right)$ (ب) $\pm\left(\frac{٥}{٣},\frac{١}{٣},\frac{٧}{٣\sqrt{٥}}\right)$

(جـ) $\pm\left(\frac{١}{٣},\frac{٥}{٣},\frac{٧}{٣\sqrt{٥}}\right)$ (د) $\pm\left(\frac{١}{٣\sqrt{٥}},\frac{١}{٣},\frac{٧}{٣\sqrt{٥}}\right)$

43 إذا كانت زوايا الاتجاه لمتجه هي θ ، θ ، α على الترتيب حيث : $جا^{٢}\alpha = ٣جا^{٢}\theta$ فإن : $جتا^{٢}\theta$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

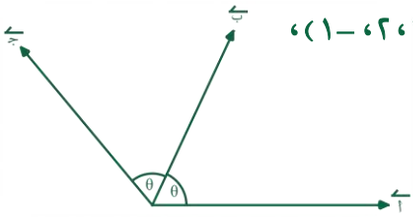
44 في الشكل المقابل :

إذا كان $\vec{ب}$ ينصف الزاوية بين المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{جـ}$ حيث : $\vec{أ}$ = (١ ، ٢ ، ـ١) ،

$\vec{ب}$ = (٦ ، ك ، ٠) ،

$\vec{جـ}$ = (٤ ، ٠ ، $٢\sqrt{٢}$) ،

فإن : ك = ...



(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٩

45 إذا كان $\vec{أ}$ = س + ص + ع ، $\vec{ب}$ ، $\vec{جـ}$ = ص ـ ع ثلاث متجهات في الفراغ وكان : $\vec{أ}\times\vec{ب}=\vec{جـ}$ ، $\vec{أ}\cdot\vec{ب}$ = ٠ ، فإن : $\vec{ب}\cdot(\vec{جـ}\times\vec{أ})$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

46 إذا كانت المركبة الاتجاهية للمتجه $\vec{أ}$ في اتجاه المتجه $\vec{ب}$ هي $(\frac{٤}{٩},\frac{-٢}{٩},\frac{-٤}{٩})$ والمركبة الجبرية للمتجه $\vec{أ}$ في اتجاه المتجه $\vec{ب}$ تساوي $\frac{-٢}{٣}$ فإن جيوب تمام المتجه $\vec{ب}$ هي .....

(أ) $(\frac{-٢}{٣},\frac{١}{٣},\frac{٢}{٣})$ (ب) $(\frac{١}{٣},\frac{٢}{٣},\frac{-٢}{٣})$

(جـ) $(\frac{-٢}{٣},\frac{١}{٣},\frac{-٢}{٣})$ (د) $(\frac{٢}{٣},\frac{١}{٣},\frac{٢}{٣})$

47 إذا كان : $(\vec{أ}+\vec{ب})\cdot(\vec{أ}-\vec{ب})$ = ٣ ، $||\vec{أ}||=٢||\vec{ب}||$ فإن : $||\vec{أ}+\vec{ب}||$ يمكن أن تساوي .....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) أ ، ب معًا

48 المتجه $\vec{ك}$ العمودي على المستوى الذي يحوي الثلاث نقاط أ (١ ، ـ١ ، ٤) ، ب (٢ ، ٠ ، ١) ، جـ (٠ ، ٢ ، ٣) هو ..... حيث $||\vec{ك}||=٨\sqrt{٦}$

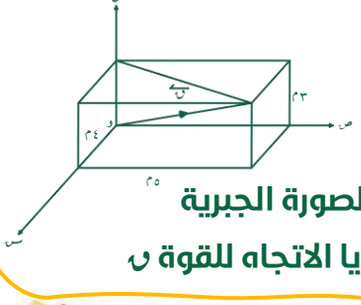
(أ) ١٦س + ٨ص ـ ٨ع (ب) ١٦س + ٨ص + ٨ع

(جـ) ـ١٦س ـ ٨ص ـ ٨ع (د) ب ، جـ معًا

ثانيًا : أهم الأسئلة المقالية

49 أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط : (٧ ، ١ ، ٣) ، (٥ ، ٣ ، ك) ، (٣ ، ٥ ، ٣) هو مثلث متساوي الساقين ، ثم أوجد قيمة (قيم) ك التي تجعل المثلث متساوي الأضلاع

50 الشكل المقابل يمثل قوة ق مقدارها ٢٠٠ نيوتن

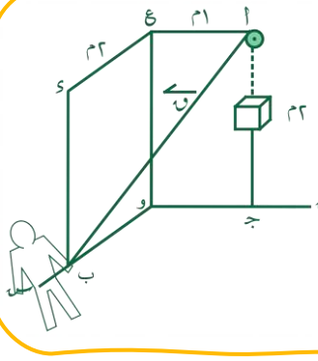


(أ) عبر عن القوة ق بالصورة الجبرية

(ب) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة ق

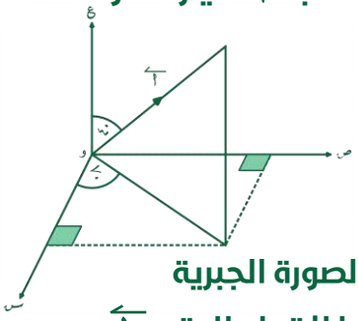
قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

51 في الشكل المقابل
إذا كانت قوة الشد في الخيط تساوي ٢١ نيوتن
أوجد المركبات الجبرية للقوة ن في اتجاهات محاور الاحداثيات



52 إذا كان ||أ|| = ٦ وكانت جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه أ هي على الترتيب $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$
وكان المتجه ب = (−٢ ، ٣ ، ٥) أوجد أ × ب

53 الشكل المقابل يمثل متجه أ معياره ١٠ وحدات



(أ) عبر عن المتجه أ بالصورة الجبرية
(ب) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه أ

54 إذا كان : أ ، ب متجهين قياس الزاوية بينهما ٦٠°
، ||ب|| = ٤ وكان (أ + ٢ب) ، (٢أ − ب) متعامدين
فأوجد المركبة الجبرية للمتجه أ في اتجاه المتجه ب

55 إذا كان : أ ، ب متجهين غير صفريين حيث :
||أ|| = ٢√٢ ، ||ب|| = ٣ ، قياس الزاوية بينهما يساوي $\frac{\pi}{٤}$ فأوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه ٥أ + ٢ب ، أ + ٣ب ضلعان متجاوران

56 إذا كان : ||أ|| = ٣ ، ||ب|| = ٤ ، قياس الزاوية بينهما ١٢٠° فأوجد ||أ − ب||

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

التوافيق :

• $ت_{ن}^{ر} = \frac{ل_{ن}^{ر}}{ل_{ر}} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \rfloor \lfloor ن - ر \rfloor}$ حيث : $ن \geq ر$ أو $ر \geq ن \geq ٠$

$ت_{ن}^{٢} = \frac{ن(ن-١)}{\lfloor ٢}$ ، $ت_{ن}^{٣} = \frac{(ن+١)(ن)(ن-١)}{\lfloor ٣}$ ،

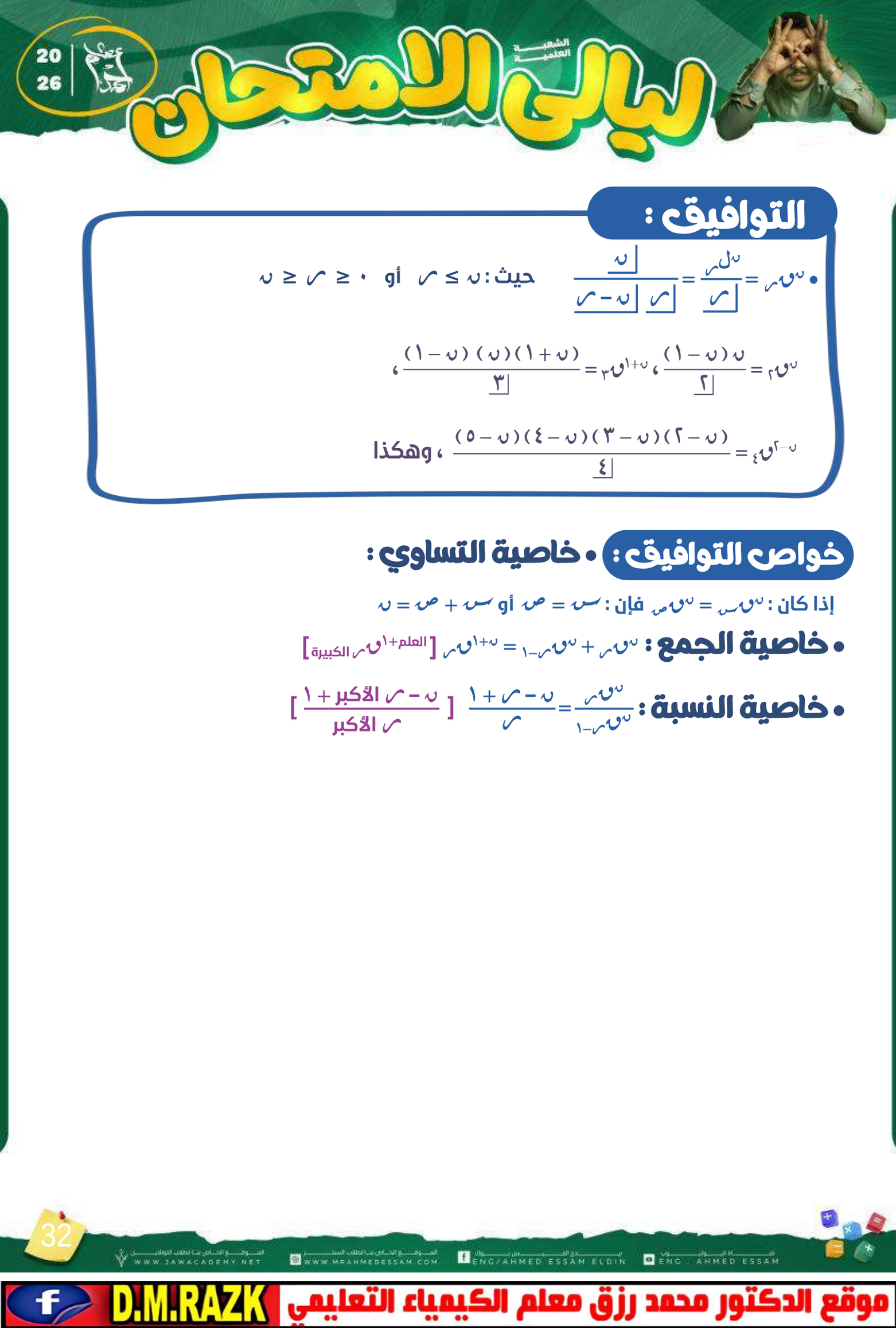
$ت_{ن}^{٤} = \frac{(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)}{\lfloor ٤}$ ، وهكذا

خواص التوافيق : • خاصية التساوي :

إذا كان : $ت_{س}^{ن} = ت_{ص}^{ن}$ فإن : $س = ص$ أو $س + ص = ن$

• **خاصية الجمع :** $ت_{ر}^{ن} + ت_{ر-١}^{ن} = ت_{ر}^{ن+١}$ [العلم+١ ر الكبيرة]

• **خاصية النسبة :** $\frac{ت_{ر}^{ن}}{ت_{ر-١}^{ن}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$ [$\frac{ن - ر \text{ الأكبر} + ١}{ر \text{ الأكبر}}$]



أولاً : ملخص نظرية ذات الحدين :

(1) نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

إذا كان ن عدد صحيح موجب فإن :

- $(س + ص)^{ن} = ن_{ق_0} س^{ن} + ن_{ق_1} س^{ن-1} ص^{1} + ن_{ق_2} س^{ن-2} ص^{2} + ن_{ق_3} س^{ن-3} ص^{3}$ + ... + $ن_{ق_ن} ص^{ن}$
- $\therefore (س + ص)^{ن} = س^{ن} + ن_{ق_1} س^{ن-1} ص + ن_{ق_2} س^{ن-2} ص^{2} +$ ..... + $ص^{ن}$

ويكون هذا المفكوك حسب قوى س التنازلية أو قوى ص التصاعدية .

- $(س - ص)^{ن} = س^{ن} - ن_{ق_1} س^{ن-1} ص + ن_{ق_2} س^{ن-2} (-ص)^{2} +$ ..... + $(-ص)^{ن}$

مع مراعاة أن الحد الثاني في ذات الحدين هو -ص وليس ص

ملاحظات على النظرية :

(١) في مفكوك $(س \pm ص)^{ن}$ يكون : عدد حدود مفكوك = ن + ١ [الأس + ١]

[يطبق إذا كان ما بداخل القوس حدين فقط]

(٢) إذا كان ما بداخل القوس اكثر من حدين وغير قابل للتبسيط يمكن استخدام القاعدة الاتية لايجاد عدد الحدود :

الأس + عدد الحدود داخل القوس − ١ $ق_{\text{عدد الحدود داخل القوس} - ١}$

أما إذا كان قابل للتبسيط فالقاعدة " الأس + عدد الحدود داخل القوس − ١ $ق_{\text{عدد الحدود داخل القوس} - ١}$ " دي مش شغالة ولازم تبسيط

(٣) مفكوك $(ص + س)^{ن}$ يكون حسب قوى س التصاعدية بينما مفكوك $(س + ص)^{ن}$ يكون حسب قوى س التنازلية مع ملاحظة أن :

مفكوك $(ص + س)^{ن}$ = مفكوك $(س + ص)^{ن}$ ولكن الفرق في ترتيب الحدود فقط

يعني الحد الخامس في $(ص + س)^{ن}$ ≠ الحد الخامس في $(س + ص)^{ن}$ مثلاً

[المفكوك أتقلب]

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(٤) لإيجاد مجموع معاملات حدود مفكوك نضع المتغيرات بـ ١ :

(القاعدة دي سليمة مهما كان عدد الحدود جوا القوس)

(٥) يمكن التعبير عن مفكوك ذات الحدين باستخدام الرمز سيجما Σ :

فمثلاً : • $(س + ١)^{ن} = \sum_{ر=٠}^{ن} {}^{ن}م_{ر} \, س^{ر}$

وبصفة عامة : $(س + ص)^{ن} = \sum_{ر=٠}^{ن} {}^{ن}م_{ر} \, س^{ن-ر} \, ص^{ر}$ ← الحد العام

- أي ذات حدين تكون معاملات حدده توافيق فقط لو اللي جوه معاملاتهم وحايد غير كدا المعاملات مش توافيق بس

(2) الحد العام في مفكوك ذات الحدين

يرمز للحد العام في مفكوك $(س + أ)^{ن}$ بالرمز $ح_{ر+١}$ حيث : $ر \ni ط$

$٠ \leq ر \leq$ الأس ، $١ \leq$ الرتبة $\leq$ الأس $+ ١$ ويكون : $ح_{ر+١} = {}^{ن}م_{ر} \, س^{ن-ر} \, أ^{ر}$

- الحد العام $= ح_{ر+١} = {}^{ن}م_{ر}$ (الأول)$^{ن-ر}$ × (التاني)^{ر}
- معامل $ح_{ر+١} = {}^{ن}م_{ر}$ (معامل الأول)$^{ن-ر}$ × (معامل التاني)^{ر}

- **لاحظ :** الحد الخامس رتبته تساوي ٥ بينما $ر = ٤$

[رتبة الحد هي ترتيبه في المفكوك " مش $ر$ يعني " ودائمًا $ر$ أقل من رتبة الحد بواحد]

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظات على الحد العام

(١) إيجاد حد من النهاية :

ح$_{ر+١}$ من النهاية في المفكوك (س + أ)^{ن} = ح$_{ر+١}$ من البداية

في مفكوك (أ + س)^{ن} أو ح$_{ر+١}$ من النهاية في المفكوك (س + أ)^{ن}

= ح$_{\text{عدد الحدود} - ر \text{ النهاية} + ١}$ من البداية في نفس المفكوك (س + أ)^{ن}

لاحظ

- عدد حدود المفكوك = رتبة البداية + رتبة النهاية − ١

فمثلاً : الحد الخامس من النهاية مفكوك (أ + ب)^{ن} هو نفسه الحد الخامس من البداية في مفكوك (ب + أ)^{ن} أو هو نفسه الحد (ن + ١ − ٥ + ١) من البداية في مفكوك (أ + ب)^{ن}

---

(٢) الحد الأوسط VS الحدان الأوسطان :

في مفكوك (أ + ب)^{ن} إذا كان :

(١) ن زوجية : يكون عدد الحدود فرديًا ويوجد للمفكوك حد أوسط وحيد

وهو : ح$_{\frac{ن}{٢}+١}$ أو ح$_{\frac{ن}{٢}+١}$ ← تطبق إذا كان مابداخل القوس حدين فقط

(٢) ن فردية : يكون عدد الحدود زوجيًا ويوجد للمفكوك حدان أوسطان

هما : ح$_{\frac{ن+١}{٢}}$ أو ح$_{\frac{ن+٣}{٢}}$ [متتاليان] أو : ح$_{\frac{ن+١}{٢}}$ والحد الذي يليه

ملحوظة : إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك (س + ص)^{ن} متساويين فإن : س = ص

فمثلاً : إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك (أس + ب)$^{٢ن+١}$ متساويين

فإن : أس = ب ∴ $س = \frac{ب}{أ}$

ملحوظة :

- الحد الأوسط أو الحدان الأوسطان يكون عندهما التوافيق لها أقصى قيمة .
- الحدان الأوسطان متتاليان
- النسبة بين الحدين الأوسطين = $\frac{\text{ح الأوسط الأول}}{\text{ح الأوسط الثاني}}$ ← اللى رتبته : $\frac{\text{الأس} + ١}{٢}$
- توافيق الحدين الأوسطين متساوية

(٣) قاعدة التبسيط :

- $(س + أ)^{ن} + (س - أ)^{ن} = ٢(ج_{١} + ج_{٣} + ج_{٥} + ...)$ من مفكوك $(س + أ)^{ن}$

ويكون : عدد حدود المفكوك بعد البسيط :

إذا كان : ن زوجي ← $\frac{ن}{٢} + ١$

إذا كان : ن فردي ← $\frac{ن + ١}{٢}$

← لو معرفتش تحفظها استنتجها

- $(س + أ)^{ن} - (س - أ)^{ن} = ٢(ج_{٢} + ج_{٤} + ج_{٦} + ...)$ من مفكوك $(س + أ)^{ن}$

ويكون : عدد حدود المفكوك بعد البسيط :

إذا كان : ن زوجي ← $\frac{ن}{٢}$

إذا كان : ن فردي ← $\frac{ن + ١}{٢}$

← لو معرفتش تحفظها استنتجها

(4) إيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$:

- في مفكوك $(س + أ)^{ن}$ لإيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ نتبع مايلي :

(١) نوجد الحد العام في أبسط صورة [نخلي المتغير واحد ..... سنجفة]

(٢) نساوي أس المتغير في الحد العام بالأس المطلوب ك فنحصل على قيمة ر

ومنها نحدد الحد المطلوب الذي يحتوي على $س^{ك}$ وهو $ج_{ر+١}$

(٣) نوجد الحد المشتمل على $س^{ك}$ (أو معامله) بالتعويض عن قيمة ر

التي حصلنا عليها في الحد العام

مع ملاحظة أن :

- إذا كانت قيمة ر التي حصلنا عليها $\notin$ ط أو [ر > الأس] فإن هذا يدل على أن المفكوك لا يوجد به حد يشتمل على $س^{ك}$

- إذا كان المطلوب إيجاد الحد الخالي من س (الحد المطلق في المفكوك) فنعتبر أن المطلوب هو إيجاد المشتمل على $س^{٠}$ أي نساوي أس المتغير س في الحد العام بالصفر

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

- لإيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$: نخلي $س$ واحدة في الحد العام

ولإيجاد الحد المشتمل على $ص^{ك}$: نخلي $ص$ واحدة في الحد العام

ولإيجاد الحد المشتمل على $(\frac{س}{ص})^{ك}$: نخلي $\frac{س}{ص}$ واحدة في الحد العام .

لإيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}\ ص^{م}$: نخلي $س$ واحدة ، $ص$ واحدة في الحد العام

ملاحظات على إيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$:

1 إيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ في : $(س + ا)^{ن} \pm (٢س - ٣)^{ن}$ هو نفسه الحد المشتمل على $س^{ك}$ في المفكوك الأول $\pm$ الحد المشتمل على $س^{ك}$ في المفكوك الثاني .

2 الحد المشتمل على $س^{ك}$ في

ضرب اتنين ذات حدين

بنجيب الحد العام للأول ونضربه في الحد العام للثاني ونبسط وبعدها نساوي الأس بالأس المطلوب ونكون جدول بقيم $ر$ و $م$ ونعوض بالبدائل اللي نافعة ونحط زائد وهكذا

ذات حدين جواها أكتر من حدين غير قابلة للتبسيط

بنجيب الحد العام بيطلع فيه ذات حدين بنجيب الحد العام واشتغل بـ $ر$ و $م$ والجدول وكدة بعد التبسيط طبعا

3 لو معانا ذات حدين وكان اللي جوه ضربهم في بعض يطير المتغير ساعتها يبقى الحد الخالي من $س$ مباشرةً بدون حل (سنجفة) هو الحد الأوسط :

$(ا س^{ك} + \frac{ك}{س^{ك}})^{ن}$ ← الخالي من $س$ هو الأوسط

4 ذات الحدين على الصورة $(ا + ب س)^{ن}$ ← مش محتاج (سنجفة) والحد المشتمل على $س^{ك}$ هنا هو $ح_{ك+١}$ يعني مثلًا الحد المشتمل على $س^{٤}$ هو $ح_{٥}$ وهكذا .....

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

إيجاد النسبة بين حدين متتالين

في مفكوك : $(أ س^{ن} + ب ص^{ن})^{ن}$ يكون :

$$\bullet \frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{ب ص}{أ س} \qquad \bullet \frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{ب}{أ}$$

الجزء ده من القانون موجب

- $\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر \text{ الأصغر} + 1}{ر \text{ الأصغر}} \times \frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الأول}}$
- $\frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن - ر \text{ الأصغر} + 1}{ر \text{ الأصغر}} \times \frac{\text{معامل الثاني}}{\text{معامل الأول}}$

لاحظ : لو الفرق اتنين هات وسيط

ملاحظات على النسبة بين حدين :

- لو أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ب} = \frac{ء}{جـ}$
- النسبة بين $ح_{٤}$ ، $ح_{٧}$ هي : $\frac{ح_{٤}}{ح_{٧}}$ (اللي بتنطق الأول بيتحط فوق)
- أ ، ب ، جـ في تتابع حسابي فإن : أ + جـ = ٢ب
- أ ، ب ، جـ في تتابع هندسي فإن : $ب^{٢}$ = أجـ

• لإيجاد أكبر حد في المفكوك وليكن ($ح_{ر+1}$)

نحل المتباينتين :

(١) $\left|\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}}\right| \geq 1$ (٢) $\left|\frac{ح_{ر+2}}{ح_{ر+1}}\right| \geq 1$

ونختار قيم ر المشتركة من حل المتباينتين .

• مع مراعاة أن : المقياس يوزع ضرب وقسمة

والمقياس هنا بيتحط على النص التاني من قانون النسبة

• ولإيجاد أكبر معامل في المفكوك نعمل نفس الكلام بس نسب معاملات

لاحظ : في المفكوك $(1 + س ص)^{ن}$ أو $(1 - س ص)^{ن}$ أو $(س ص + ص)^{ن}$ أو $(س ص - ص)^{ن}$

(أي ذات حدين معاملات حديها وحايد) إذا كان :

• ن زوجيًا : أكبر معامل في المفكوك هو معامل الحد الأوسط = $س^{\frac{ن}{2}}$

• ن فرديًا : فإن معاملين الحدين الأوسطين متساويان ومعامل أي منهم هو أكبر معامل

في المفكوك = $س^{\frac{ن-1}{2}}$ أو $س^{\frac{ن+1}{2}}$

▪ لو قالك أن $ح_{٩}$ مثلًا أكبر حد ساعتها هتعمل كدة :

$\left|\frac{ح_{٩}}{ح_{٨}}\right| \geq 1$ ، $\left|\frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}}\right| \geq 1$ وتحل وتاخد القيم المشتركة للمتغير

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الوحدة الأولى جبر

أولًا : أهم أسئلة الاختيار من متعدد

1 معامل الحد الذي يحتوي على $س^{3}$ في مفكوك $(1 + 2س)^{10}$ حسب قوى $س$ التنازلية هو .....

(أ) $3^{10} ق_{3}$ (ب) $2^{10} ق_{3}$ (جـ) $8^{10} ق_{3}$ (د) $4^{10} ق_{3}$

2 الحد الخالي من $س$ في مفكوك $(س - \frac{1}{س})^{10}$ حسب قوى $س$ التنازلية هو .....

(أ) $ق_{4}$ (ب) $ق_{7}$ (جـ) $ق_{6}$ (د) $ق_{5}$

3 إذا كان الحد الخالي من $س$ في مفكوك : $(س + \frac{1}{س})^{ن}$ هو $ق_{7}$ فإن : $ن$ = ...

(أ) 6 (ب) 10 (جـ) 12 (د) 8

4 في مفكوك $(أس + 3)^{11}$ حسب قوى $س$ التنازلية إذا كانت النسبة بين معاملي الحدين الرابع والثالث كنسبة 9 : 5 ، فإن : $أ$ = ...

(أ) 3 (ب) 5 (جـ) 9 (د) 11

5 في مفكوك $(س + ص)^{ن-1}$ حسب قوى $س$ التنازلية إذا كان الحد السابع له أكبر معامل ، فإن عدد حدود المفكوك = ...

(أ) 12 (ب) 13 (جـ) 14 (د) 15

6 في مفكوك : $س^{2} (\frac{س^{2}}{2} + \frac{2}{س^{3}})^{15}$ ، يكون معامل $س^{12}$ = ...

(أ) $\frac{1365}{128}$ (ب) $\frac{1365}{64}$ (جـ) $\frac{1365}{256}$ (د) $\frac{1365}{512}$

7 الحد الذي له أكبر معامل في مفكوك : $(1 + س)^{10}$ هو .....

(أ) $ق_{11}$ (ب) $ق_{10}$ (جـ) $ق_{6}$ (د) $ق_{5}$

8 الحد الخالي من $س$ في مفكوك : $(س^{2} + 2 + \frac{1}{س^{2}})^{6}$ يساوي .....

(أ) 924 (ب) 792 (جـ) 495 (د) 64

9 في مفكوك $(س^{2} + \frac{1}{8س})^{13}$ حسب قوى $س$ التنازلية ، إذا كان الحدان الرابع والحادي عشر متساويان ، فإن $س$ = ...

(أ) $-\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) -2 (د) 2

10 إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك : $(2 + س)^{35} (4 - 2س + س^{2})^{35}$ متساويان ، فإن $س$ = ...

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 4

11 في مفكوك : $(أ - ب)^{ن}$ حسب قوى $أ$ التنازلية إذا كان مجموع الحدين الخامس والسادس يساوي صفر فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{5}{ن - 4}$ (ب) $\frac{6}{ن - 5}$ (جـ) $\frac{ن - 5}{6}$ (د) $\frac{ن - 4}{5}$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

25

12 في مفكوك $(س + \frac{٢}{س^{٢}})^{٨}$ حسب قوى $س$ التنازلية ، إذا كان الحد الأوسط يساوي ٧٠ ، فإن : $س$ = ...

(أ) ١ (ب) ± ٢ (جـ) ± ٣ (د) ٤

26

13 في مفكوك $(١ - س)^{٨} (١ + س + س^{٢})^{٨}$ إذا كان معامل $س^{٦}$ يساوي $٨ ق_{(م٣ + ١٠)}$ ، فإن قيمة م يمكن أن تكون .....

(أ) -٨ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ٨

26

14 في مفكوك $(١ + جـ س)^{١٠}$ حسب قوى $س$ التصاعدية إذا كان معامل الحد الثالث يساوي ١٨٠ فإن : جـ = ...

(أ) ± ١ (ب) ± ٢ (جـ) ± ٣ (د) $\pm \sqrt{٢}$

15 إذا كان : $(٣س)^{١٠} - ١٠ (٣س)^{٩} (\frac{١}{س}) + \frac{١٠ \times ٩}{٢ \times ١} (٣س)^{٨} (\frac{١}{س})^{٢} - ..... + (\frac{١}{س})^{١٠} = ١٠٢٤$

فإن : $س$ ∈ ..... حيث $س$ ∈ ص

(أ) {١} (ب) {١ ، -١}

(جـ) {-١ ، -٢} (د) {-١ ، ٢}

16 إذا كان الحد المطلق في مفكوك : $(\sqrt{س} - \frac{ك}{س^{٢}})^{١٠}$ يساوي ٤٠٥ فإن : ك = ...

(أ) ± ١ (ب) ± ٢

(جـ) ± ٣ (د) لا شئ مما سبق

17 الحدان المتتاليان في مفكوك $(٢س + ٣)^{٧٤}$ حسب قوى $س$ التصاعدية اللذان معاملاتهما متساوية هما .....

(أ) $ح_{٢٩}$ ، $ح_{٣٠}$ (ب) $ح_{٣٠}$ ، $ح_{٣١}$

(جـ) $ح_{٣١}$ ، $ح_{٣٢}$ (د) $ح_{٢٨}$ ، $ح_{٢٩}$

18 معامل $س^{٦}$ في مفكوك : $(س + \frac{١}{س})^{٩} \times (س - \frac{١}{س})^{٩}$ هو .....

(أ) $-ق_{٣٩}$ (ب) $ق_{٣٩}$ (جـ) $ق_{٤٩}$ (د) $-ق_{٤٩}$

26

19 في مفكوك : $(\frac{١}{س} + س^{٢})^{٩}$ حسب قوى $س$ التصاعدية إذا كان : $ح_{ر-٢} = ١٢ ح_{ر-٣}$

عند $س = ٢$ ، فإن : ر = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

26

20 في مفكوك : $(س^{٣} + \frac{١}{س^{٢}})^{١٠}$ حسب قوى $س$ التنازلية ، الحد الخالي من $س$ هو معامل .....

(أ) $س^{٥}$ (ب) $س^{١٠}$ (جـ) $س^{١٥}$ (د) $س^{٢٠}$

26

21 في مفكوك : $س (س + ٢)^{ن}$ حسب قوى $س$ التنازلية ، إذا كان معامل الحد الخامس يساوي ٢٤٠ ، فإن قيمة ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

26

22 في مفكوك : $(س^{٢} + ٢س + ١)^{٦}$

يكون معامل $س^{٣}$ = ...

(أ) ٨٤ (ب) ٦٦ (جـ) ٤٩٥ (د) ٢٢٠

ENG . AHMED ESSAM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

23 قيمة الحد الخالي من س في مفكوك : $(س + \frac{1}{س})^{8} + (س - \frac{1}{س})^{8}$ يساوي .....

(أ) ١٤٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ٦٠ (د) ٢٠

24 في مفكوك $(٢س^{٢} + \frac{أ}{س^{٣}})^{١٠}$ إذا كان معامل $س^{٥}$ يساوي معامل $س^{١٥}$، فإن قيمة أ = ...

(أ) $\frac{١}{٣١}$ (ب) $-\frac{٣١}{٣}$ (جـ) $\frac{٣١}{٩}$ (د) أ ، ب معًا

25 في مفكوك $(٣ + ك س)^{٩}$ إذا كان معاملا $س^{٢}$ ، $س^{٣}$ متساويان ، فإن قيمة الثابت ك = ...

(أ) $-\frac{٧}{٩}$ (ب) $-\frac{٩}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{٩}$ (د) $\frac{٩}{٧}$

26 في مفكوك $(س + ص)^{٨}$ إذا كان $٢ ح_{٥} = ح_{٤} + ح_{٦}$

فإن : $\frac{س}{ص}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) -٢ (د) أ ، ب معًا

27 في مفكوك $(\frac{٢س}{ص} + \frac{ص}{٢س})^{١٠}$ ،

يكون معامل $(\frac{س}{ص})^{٤}$ = ...

(أ) ١٩٢٠ (ب) ١٦٨٠ (جـ) ٣٣٦٠ (د) ٩٦٠

28 إذا كانت النسبة بين $ح_{٦}$ من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٥}$ ، $ح_{٥}$ من مفكوك $(س - \frac{١}{س^{٢}})^{١٤}$ تساوي $\frac{٨}{٩}$ فإن قيمة س = ...

(أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $-\frac{١}{٣}$

29 في مفكوك $(٣ + ٢ س)^{٨} + (٣ - ٢س)^{٨}$ ،

يكون الحد الأوسط = ... $س^{٤}$

(أ) ٩٠٧٢٠ (ب) ٤٥٣٦٠ (جـ) ٣٦٢٨٨٠ (د) ١٨١٤٤٠

30 في مفكوك $(١ - س)^{٨} + ٢٤ س (١ - س)^{٧} + ٢٥٢ س^{٢} (١ - س)^{٦} + ... + ٦٥٦١ س^{٨}$ تكون القيمة العددية للحد السادس حسب قوى س التصاعدية عندما س = ٢ تساوي .....

(أ) -٥٧٣٤٤ (ب) ٥٧٣٤٤ (جـ) -١٢٣٤٤ (د) ١٢٣٤٤

31 إذا كان $(ص^{٣} + س^{٤})^{ن}$ = ... + ك $س^{١٢} ص^{١٢}$ + ... ، فإن قيمة ك = ...

(أ) ٥٦ (ب) ٤٨ (جـ) ٤٢ (د) ٣٥

32 إذا كان أحد حدود المفكوك : $(س^{٣} + ص^{٢})^{ن}$ يحتوي على $س^{٦} ص^{١٨}$ ، فإن عدد حدود المفكوك = ...

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٣

33 معامل الحد الأوسط في مفكوك :

$(١ + ٣ س + ٣س^{٢} + س^{٣})^{٤}$ يساوي .....

(أ) ٤ق٣ (ب) ٤ق٣ (جـ) ٦ق١٢ (د) ٧ق١٢

34 إذا كان $(١ + أ س)^{ن} = ١ + ٨س + ٢٤ س^{٢} + ...$ ،

فإن أ + ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

35 في مفكوك : $(س^{٢} + (أ س)^{-١})^{١٢}$ إذا كانت النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل $س^{٣}$ على الترتيب تساوي ٥ : ١٦ حسب قوى س التنازلية ، فإن قيمة أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

36 معامل $س^{-٥}$ في مفكوك : $(\frac{١}{س^{٢}} - س^{٥})^{٩}$ يساوي .....

(أ) $-٣٥^{٩}$ (ب) $٤٥^{٩}$ (ج) $٣٥^{٩}$ (د) $-٤٥^{٩}$

37 النسبة بين الحدين الأوسطين في مفكوك : $[(س^{\frac{٢}{٥}} + ١)^{٧} (س^{\frac{١}{٥}} - ١)^{٧}]$ على الترتيب حسب قوى $س$ التصاعدية هي .....

(أ) $-\frac{س^{٢}}{٥}$ (ب) $-\frac{١١س^{٢}}{٢٠}$ (ج) $-\frac{٥}{س^{٢}}$ (د) $-\frac{٢٠}{١١س^{٢}}$

38 في مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{٥س})^{٣٠}$ حسب قوى $س$ التنازلية رتبة الحد الخالي من $س$ هي .....

(أ) $٣٠ - ١$ (ب) ٢٠ (ج) $٢٠ - ١$ (د) $٢٠ + ١$

39 في مفكوك $(٢ + س)^{٩}$ حسب قوى $س$ التنازلية إذا كان الحد السادس مضافًا إليه $\frac{١}{٤}$ الحد السابع يساوي سبعة أمثال الحد الثامن فإن : $س$ = ...

(أ) -٣ أ، $\frac{٨}{٣}$ (ب) -٣ أ، $\frac{٤}{٣}$

(ج) ٣ أ، $-\frac{٨}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$ أ، $\frac{٤}{٣}$

40 عدد حدود المفكوك : $(س^{٢} + ١)(س + \frac{١}{س})^{١١}$ يساوي ..... حدًا

(أ) ١١ (ب) ٢٢ (ج) ١٢ (د) ١٣

41 في مفكوك $(١ + س^{٢})^{٢٠}(س^{٢} + ٢ + \frac{١}{س^{٢}})^{١٠}$ ، معامل الحد الأوسط هو .....

(أ) $١٠^{٢٠}$ (ب) $١٠^{٤٠}$ (ج) $٢٠^{٤٠}$ (د) $٢١^{٤٠}$

42 إذا كان $س_{١}$ ، $س_{٢}$ هما جذرا المعادلة $س^{٢} + ٧س + ٢ = ٠$ ، فإن الحد الأوسط في مفكوك $(س_{١} + ٣ س_{٢})^{٦}$ يساوي .....

(أ) ٣٦٨٢ (ب) ٣٧٥٠ (ج) ٣٨٦٤ (د) ٤٣٢٠

43 معامل $س^{٢}$ في مفكوك $(١ + س)^{١١}(١ - س)^{٩}$ يساوي .....

(أ) ٢ (ب) -٢ (ج) ٨ (د) -٨

44 في مفكوك : $(س + ٣)^{١٠}$ حسب قوى $س$ التنازلية تكون قيم $س$ التي تجعل $ح_{٧}$ هو أكبر حدًا عدديًا هي .....

(أ) $\frac{٥}{٢} \leq |س| \leq \frac{١٢}{٧}$ (ب) $\frac{٧}{١٢} \leq |س| \leq \frac{٥}{٢}$

(ج) $\frac{٥}{٢} \leq |س| \leq \frac{٢١}{٧}$ (د) $\frac{١٢}{٧} \leq |س| \leq \frac{٥}{٢}$

45 أكبر حد في مفكوك : $(س + ص)^{١٠}$ يساوي ..... عندما $س = ٢$ ، $ص = ٣$

(أ) ١٩٥٩٥٥٢ (ب) ٢٤٤٩٤٤٠ (ج) ١٠٨٨٦٤٠ (د) ٤٨٤٨٨٨

46 في مفكوك : $(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س})^{١٠}$ النسبة بين الحد الأوسط والحد الخامس تساوي ..... عند $س = ٣$

(أ) $\frac{١}{١٠}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{٣}{١٠}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

47 إذا كان : $(١ + جـ س)^{ن} = ١ + ٢٠ س + أ_{٢} س^{٢} + أ_{٣} س^{٣} + ... + أ_{ن-١} س^{ن}$ وكان $١٦ أ_{١} = ٣ أ_{٣}$ ، فإن : $ن + جـ$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (ج) ١٤ (د) ١٦

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

23 **48** إذا كان $(1 + س + س^{2})^{9} = ا_{0} + ا_{1} س + ا_{2} س^{2} + ا_{3} س^{3} + ... + ا_{18} س^{18}$ ، فإن :

$ا_{0} + ا_{2} + ا_{4} + ... + ا_{18} =$ .....

(أ) ٣٦٥ (ب) ٢٠٩٤ (جـ) ٣٢٨١ (د) ٩٨٤٢

ثانيًا : أهم الأسئلة المقالية

49 في مفكوك $(1 + م س)^{ن}$ إذا كانت $٤ ح_{٦} = ٧ ح_{٨}$ ، $\frac{ح_{٤}}{ح_{٦}} = \frac{1}{٤}$ وذلك عندما $س = 1$ فأوجد قيمة كل من م ، ن

50 في مفكوك :

$(٢س - \frac{1}{٣س^{٢}})^{٩}$ أوجد :

(أ) معامل $س^{٣}$ (ب) الحد الخالي من س

(جـ) أثبت أن المفكوك لا يحتوي على حد يشتمل على $س^{٢}$

23 **51** في مفكوك :

$(٢ + س)^{٧} + ٧س^{٢}(٢ + س)^{٦} + ٢١ س^{٤}(٢ + س)^{٥} + ... + س^{١٤}$ إذا كان الحدان الأوسطان متساويان ، فأوجد قيمة س

52 في مفكوك $(1 + جس)^{١٠}$ إذا كان معامل الحد الثالث يساوي ١٨٠ ، وكان الحد الخامس يساوي ٢١٠ أوجد قيمة كل من جـ ، س حيث جـ عدد صحيح موجب

53 إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا أثبت أنه لا يوجد حدٌّ خالٍ من س في مفكوك $(س^{٥} + \frac{1}{س^{٢}})^{ن}$ إلا عندما تكون ن مضاعف للعدد ٧ ثم أوجد هذا الحد في حالة $ن = ٧$

54 في مفكوك $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الثاني وسط حسابي بين الحد الأول والحد الثالث عندما $س = ٢ ص$ فأوجد قيمة ن

55 في مفكوك $(س^{ك} + \frac{1}{س})^{٦}$ حيث ك عدد صحيح موجب . أوجد :

أولًا : قيمة ك التي تجعل للمفكوك حدًا خاليًا من س

ثانيًا : النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط لأكبر قيمة من قيم ك التي حصلت عليها من أولًا

56 إذا كانت الحدود : الثالث ، الرابع ، الخامس من مفكوك : $(س + ص)^{ن}$ هي ١١٢ ، ٤٤٨ ، ١١٢٠ على الترتيب أوجد قيم كل من ن ، ص ، س

الموقع الخاص بنا لطلاب الدولي WWW.JAWACADEMY.NET
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

أولاً: ملخص المشتقة الأولى

(أ) قواعد الاشتقاق:

الدالـــــــــة	اشتقـــــــاقـــــها
ص = هـ(س)	ص' = هـ(س)
ص = هـ^-(س)	ص' = -هـ^-(س)
ص = هـ د(س)	ص' = د'(س) هـ د(س)
ص = هـ(س) (د(س))	ص' = هـ(س) [د(س) + د'(س)] القاعدة الجميلة
ص = أ^س	ص' = أ^س لو أ
ص = أ^د(س)	ص' = أ^د(س) د'(س) لو أ
ص = لو س ص = لو أ^س ص = لو س/أ	ص' = 1/س
ص = لو | د(س) |	ص' = د'(س)/د(س)
ص = لو أ د(س) حيث أ ثابت	ص' = د'(س)/د(س) × لو أ هـ أو د'(س)/د(س) لو أ
ص = لو | د(س) |	ص' = د'(س)/د(س) × لو أ هـ أو د'(س)/د(س) لو أ
لاحظ: اشتقاق لو | ⊗ | هو نفسه اشتقاق لو ⊗ ولكن الدالتين مختلفين تمامًا	
ص = أ	ص' = صفر حيث أ ثابت
ص = س^ن	ص' = ن س^ن-١ حيث ن ثابت
ص = √ د(س)	ص' = د'(س) / ٢√د(س) = د'(س)/٢ص

ENG. AHMED ESSAM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدالـــــــــة	اشتقـــــاقـــــها
ص = جا د(س)	ص' = د'(س) جتا د(س)
ص = جتا د(س)	ص' = −د'(س) جا د(س)
ص = ظا د(س)	ص' = د'(س) قا^{2} د(س)
ص = ظتا د(س)	ص' = −د'(س) قتا^{2} د(س)
ص = قا د(س)	ص' = د'(س) قا د(س) ظا د(س) = د'(س) ص ظا د(س)
ص = قتا د(س)	ص' = −د'(س) قتا د(س) ظتا د(س) = −د'(س) ص ظتا د(س)
مع مراعاة أن : قواعد اشتقاق الدوال المثلثية مستنتجة إذا كانت الزاوية بالتقدير الدائري فقط ، ولو الزاوية كانت بالتقدير الستيني اشتق عادي وبعدها اضرب × $\frac{\pi}{180^\circ}$	
ص = | د(س) |	$ص' = \frac{د'(س) \times د(س)}{\| د(س) \|}$ ويمكن اشتقاق المقياس بإعادة تعريفه
اشتقاق حاصل ضرب دالتين : ص = د × ر	ص' = د × ر' + ر × د' [الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى]
اشتقاق القوس ص = د(س) ، ن ثابت	ص' = ن (د)$^{ن-1}$ × د'
اشتقاق الكسر $ص = \frac{د}{ر}$	$ص' = \frac{ر \times د' - د \times ر'}{(ر)^2}$ $\frac{[\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}]}{\text{المقام}^2}$
اشتقاق دالة التركيب ص = د (ر (س))	ص' = ر'(س) د' (ر (س)) (اشتق القلب برا)
ص = جا^{2}س	ص' = جا٢س
ص = جتا^{2}س	ص' = −جا٢س

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

لاحظ :

يمكن اشتقاق حاصل ضرب ٣ دوال أو أكثر مباشرة كالآتى :

$$ص' = [\frac{\text{مشتقة الأولى}}{\text{الأولى}} + \frac{\text{مشتقة الثانية}}{\text{الثانية}} + \frac{\text{مشتقة الثالثة}}{\text{الثالثة}} + ...] \times ص$$

• ويمكن إستخدام هذه القاعدة لاشتقاق ضرب دالتين .

(٢) الاشتقاق البارامتري :

• إذا كانت : $ص = د(ن)$ ، $س = ر(ن)$ فإن : $ن$ يسمى بارامتر (وسيط)

والمعادلة تسمى معادلة بارامترية ويكون : $\frac{ود}{وس} = \frac{ود}{وص} \times \frac{وص}{وس} = \frac{وص}{وس} \div \frac{وص}{ود}$

• إذا كانت : $ص = د(س)$ ، $ع = د(س)$ فإن : $س$ يسمى بارامتر ويكون :

$$\frac{وص}{وع} = \frac{وص}{وس} \times \frac{وس}{وع}$$

لاحظ :

• يمكن تحويل بعض العلاقات البارامترية لعلاقات مباشرة

• يستخدم الاشتقاق البارامتري لإيجاد مشتقة دالة بالنسبة لدالة أخري

(٣) ملاحظات عامة على الاشتقاق :

• رموز المشتقة الأولى :

$ص'$ أو $\frac{وص}{وس}$ أو $د'(س)$ أو $\frac{و}{وس}$ (الدالة) وتسمى أيضًا بالمعامل التفاضلي الأولي أو ميل مماس للمنحنى عند أي نقطة عليه .

مع مراعاة : أن الرمز $د'(س)$ لا يستخدم إلا إذا كانت المشتقة دالة في $س$ فقط ، $د'(ن)$ لا يستخدم إلا إذا كانت المشتقة دالة في $ن$ فقط ..... وهكذا

• $\frac{و}{وس}$ (أي حاجه) : معناها اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة لـ $س$

• $\frac{و}{وθ}$ معناها اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة لـ $θ$

• $\frac{وص}{وس^{٢}}$ معناها اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة لـ $س^{٢}$ [اشتقاق $س^{٢}$ في هذه الحالة يساوي ١]

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

- $\frac{د(س^{٢})}{د س} = ٢س$ (اشتق $س^{٢}$ بالنسبة لـ $س$)، $\frac{د ع}{د ن} = ٣ع^{٢} \times \frac{د ع}{د ن}$

- $\frac{د(ص^{٣})}{د س} = ٣ص^{٢} \frac{د ص}{د س}$ (اشتق $ص^{٣}$ بالنسبة لـ $س$)، $\frac{د جا \theta}{د ك} = جتا \theta \times \frac{د \theta}{د ك}$

" اشتق وفجرها "

- د`(أ) تعني المشتقة عند $س = أ$ وتأتي بالتعويض عن $س = أ$ في المشتقة

وقد نرمز لها بالرمز $(\frac{د ص}{د س})_{س = أ}$

- د`(أ) = ميل المماس لمنحنى الدالة د عند $س = أ$

- $ر`(أ)$ = ميل المماس لمنحنى الدالة ر عند $س = أ$

لاحظ: عند التعويض بنقطة في المشتقة فلابد أن يكون الناتج رقم (ثابت)

لأنه يعبر عن ميل المماس (هـــــام)

- **اشتقاق الدالة الفردية:** دالة زوجية والعكس صحيح

- **لإيجاد:**

- $\frac{د ص}{د س}$ نحتاج علاقة تربط $س$ بـ $ص$ [مباشرة نشتقها بالنسبة لـ $س$ أو بارامترية]

- $\frac{د ع}{د ن}$ نحتاج علاقة تربط ع بـ ن [بارامترية / مباشرة]

(٤) الاشتقاق اللوغاريتمي

" نأخذ لوغاريتم للطرفين قبل مانشتق "

يستخدم في الحالات الآتية:

لاشتقاق دالة(دالة)

- **مثال:**

$س^{س}$ أو $(جا س)^{س}$

أو $(س^{٣} - ١)^{ظا س}$، .....

اشتقاق دالة معقدة (كس)رقم

- **مثال:**

$هـ س \sqrt{\frac{١ + س}{١ - س}}$ وهكذا .....

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ثانيًا: ملخص المشتقات العليا

(1) المشتقات العليا :

المشتقة لدالة بدءاً من المشتقة الثانية تسمى بالمشتقات العليا وتكتب المشتقة من الرتبة ن كمل يلي :

$$ص_{(ن)} = \frac{ى^{ن} ص}{ى س^{ن}} = د^{(ن)}(س)$$

د(ن) : الرمز ده يستخدم لو المشتقة النونية دالة في س فقط

- **المشتقة الثانية :**

$ص''$ أو $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}$ أو $ص_{(٢)}$ أو $د^{(٢)}(س)$ حيث : $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}} = \frac{ى}{ى س}\left(\frac{ى ص}{ى س}\right)$

(المشتقة الثانية تساوي اشتقاق المشتقة الأولى بالنسبة لـ س)

- **المشتقة الثالثة :**

$ص'''$ أو $\frac{ى^{٣} ص}{ى س^{٣}}$ أو $ص_{(٣)}$ أو $د^{(٣)}(س)$ حيث : $\frac{ى^{٣} ص}{ى س^{٣}} = \frac{ى}{ى س}\left(\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}\right)$

(المشتقة الثالثة تساوي اشتقاق المشتقة الثانية بالنسبة لـ س)

(2) ملاحظات على المشتقات العليا :

- $\frac{ى^{٢} ص}{ى ن^{٢}} = \frac{ى}{ى ن}\left(\frac{ى ص}{ى ن}\right)$
- $\frac{ى^{٣} ع}{ى \theta^{٣}} = \frac{ى}{ى \theta}\left(\frac{ى^{٢} ع}{ى \theta^{٢}}\right)$
- $\frac{ى ص}{ى س} \times \frac{ى س}{ى ص} = ١$ بينما $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}} \times \frac{ى^{٢} س}{ى ص^{٢}} \neq ١$

[$\frac{ى^{٢} س}{ى ص^{٢}} \neq$ مقلوب $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}$]

- $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}$ معناها اشتقاق ص مرتين بالنسبة لـ س بينما $\frac{ى^{٢} س}{ى ص^{٢}}$ معناها إشتقاق س مرتين بالنسبة لـ ص
- $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}$ هي معدل تغير ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند أي نقطة عليه

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

- $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}$ هي قياس للتغير الذي يحدث في الدالة الأصلية [من تزايد ونقصان وثبات]

بينما $\frac{\text{د}^2ص}{\text{د}س^2}$ هي قياس التغير الذي يحدث في $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}$ [من تزايد ونقصان وثبات] وهكذا .

أو معدل تغير ميل المماس لمنحنى د(س) عند س = أ هو د'(أ)

لاحظ :

- إذا كان د'(١) = ٥ فإن : د'(١) ≠ صفر بالضرورة [علشان نجيب د'(١)
مش بنجيب د'(١) وبعدين نشتقها لإن كدة بنشتق نقطة
وإنما بنجيب د'(س) ونعوض فيها عن س بـ ١]

تتبع أنماط الاشتقاق :

(١) ص = هـ^س ⟵ ص^(ن) = هـ^س

(٢) ص = هـ^(أس) ⟵ ص^(ن) = أ^ن هـ^(أس)

(٣) ص = أ^س ⟵ ص^(ن) = (لـو أ)^ن أ^س

(٤) ص = س^ن ⟵ ص^(ر) = ن(ن-١)(ن-٢)...(ن-ر+١) س^(ن-ر) حيث ر ≤ ن

ولو ر > ن يبقى المشتقة العليا بـ صفر

(٥) ص = س هـ^س ⟵ ص^(ن) = هـ^س (س + ن)

(٦) ص = لـو س ⟵ ص^(ن) = $\frac{(-١)^{ن+١}\,|ن-١|}{س^ن}$

(٧) ص = جا أس ⟵ ص^(ن) = أ^ن جا (أس + $\frac{ن\pi}{٢}$)

(٨) ص = جتا أس ⟵ ص^(ن) = أ^ن جتا (أس + $\frac{ن\pi}{٢}$)

ملاحظات :

(١) لإيجاد المشتقة العليا لعلاقة بارامترية

- نجيب المشتقة الأولى بخطوات الاشتقاق البارامتري
- نشتقها مرة أخرى بالنسبة للي تحت

(٢) في اثباتات المشتقات العليا : الضمني أفضل وكمل من المعفن

WWW.JAWACADEMY.NET WWW.MRAHMEDESSAM.COM ENG/AHMED ESSAM ELDIN ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ثالثًا: ملخص المماس والعمودي

مراجعة على الخطوط المستقيمة

(١) ميل الخط المستقيم : " الخطوط ميلها ثابت "

- ميل الخط = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ← متى علمت أي نقطتين
- ميل الخط = ظا θ ← متى علمت الزاوية التي يصنعها الخط مع الاتجاه الموجب لمحور س
- ميل الخط = $\frac{-\text{معامل } س}{\text{معامل } ص}$ ← متى علمت معادلة الخط مع مراعاة إن لتطبيق هذه الطريقة لازم س ، ص يكونوا في طرف واحد وتقدر أيضًا تشتق معادلة الخط وتجيبها
- ميل الخط = $\frac{ص}{س}$ ← متى علم اتجاه الخط (متجه يمثل اتجاه الخط)

← الخط الذي معادلته : ص = م س + أ يكون ميله م ويقطع محور ص في أ

(٢) إيجاد معادلة الخط المستقيم في النظام 2D :

نحتاج أي نقطة عليه أ ($س_1$ ، $ص_1$) وميله م

وتكون معادلته : $ص - ص_1 = م (س - س_1)$

(٣) • الخطان المتوازيان : لهما نفس الميل ($م_1 = م_2$)

• الخطان المتعامدان : ميل احدهما = − مقلوب ميل الآخر

($م_1 م_2 = -1$)

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(٤) • **الخط الأفقي :** (ميله = صفر)

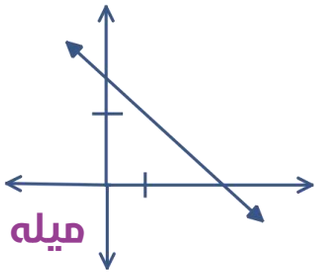
(أي خط // محور س أو محور س نفسه)

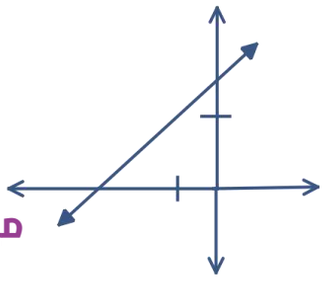
• **الخط الرأسي :** (ميله غير معرف)

(أي خط // محور ص أو محور ص نفسه)

(٥) **إذا كان الخط يصنع مع محوري الاحداثيات مثلث متساوي الساقين**

(يقطع أجزاء متساوية من المحاور) فإن : ميله = ± ١





(٦) **إذا كان الخط يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور س :**

(١) زاوية حادة : ميله > ٠ (٢) زاوية منفرجة : ميله < ٠

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تعريف المماس والعمودي

المماس هو خط (مجرد خط) يمس منحنى عند نقطة (نقطة التماس) والعمودي هو أيضًا خط (مجرد خط) يكون عمودي على المماس عند نقطة التماس ولكن نقدر نقول عليه لفظ (عمودي على المنحنى) ولإيجاد معادلة المماس نحتاج نقطة عليه وميله والنقطة اللي عليه دي غالبًا هتكون نقطة التماس مع مراعاة إنه عليه عدد لا نهائي من النقط من ضمنهم نقطة التماس وميله يمكن حسابه من :

طرق إيجاد الميل

طرق كلاسيكية — طرق حديثة

(١) طرق كلاسيكية :

وهي الطرق الأربعة العادية لحساب ميل الخط ودي ذكرناها فوق .

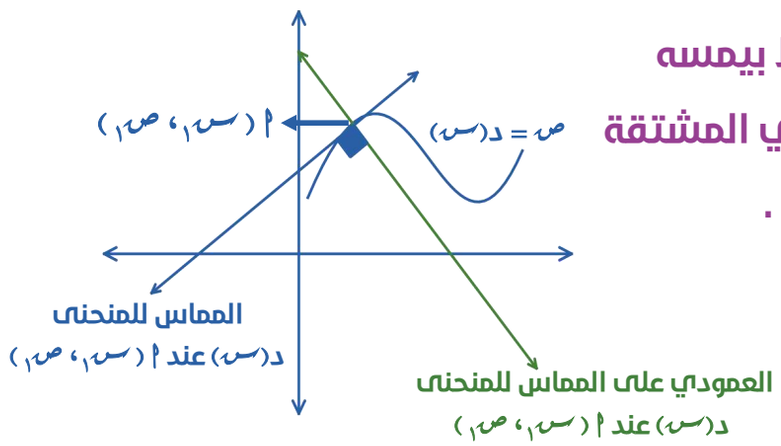
(٢) طريقة حديثة :

ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (س١ ، ص١) يساوي د`(س١)

نشتق المنحنى اللي الخط بيمسه

ونعوض بنقطة التماس في المشتقة

فنحصل على ميل المماس .



١) نجيب $\frac{ص}{س}$ بعينها

٢) نعوض في $\frac{ص}{س}$ بنقطة التماس مش أي نقطة تانية

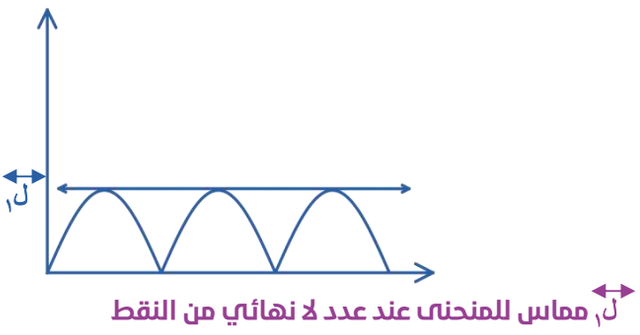
العمودي على المماس عند نقطة التماس وتكتب اختصارًا العمودي على المنحنى

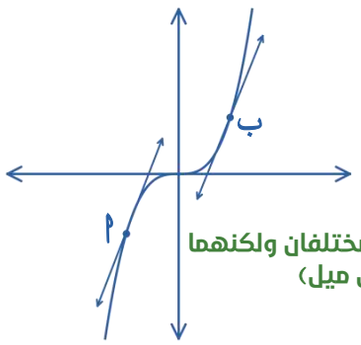
WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

ملاحظات على التعريف :

- المماس يمس منحنيات فقط ولا يمس خطوط (لأن الخطوط ميلها ثابت)
وبدون المماس لا يمكن اشتقاق المنحنيات .

- أي منحنى يكون له عدد لا نهائي من المماسات حيث كل نقطه عليه يكون لها مماس (قد يكون هناك أكثر من نقطة لها مماس واحد)





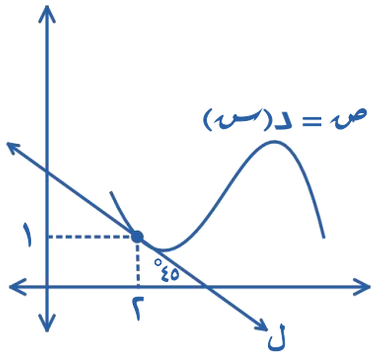
- لما يذكر المماس (العمودي) لازم يقولك لمين (لأنهي منحنى) وعند مين (يعني عند أي نقطة بالظبط عليه ← نقطة التماس)

(١) المماس للمنحنى د(س) عند أ (٢ ، ٣) ميله ← د`(٢)

(٢) المماس للمنحنى ر(س) عند ب (−١ ، ٤) ميله ← ر`(−١)

ميل المماس = مشتقة اللي بيمسه عند نقطة التماس

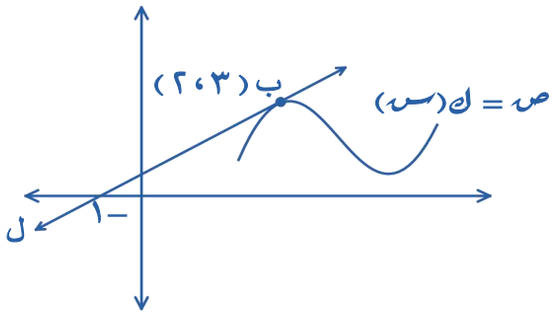
- من خلال ميل المماس أقدر أعرف المشتقة عند نقطة تساوي كام من غير ما احتاج اعرف قاعدة الدالة :



∵ ل↔ يمس د(س) عند أ (١ ، ٢)

∴ د`(٢) = ميل ل = ظا ١٣٥° = −١

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK



∵ ل ↔ يمس ك(س) عند أ (٣ ، ٢)

∴ ك`(٣) = ميل ل = $\frac{٠ - ٢}{-١ - ٣} = \frac{١}{٢}$

- نقطة التماس تحقق كل من معادلة المنحنى ومعادلة المماس لأنها تقع على كل منهم (يعني مسموحلك تعوض بنقطة التماس في معادلة المنحنى ومعادلة المماس ومعادلة العمودي)

[المماس والعمودي عليه يتقاطعان عند نقطة التماس]

- إذا عُلم ميل المماس فإن : حل المعادلة $\frac{ص}{س}$ = ميل المماس يعطى نقط التماس أو معلومة تخص نقطة التماس .

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK

رابعًا: المعدلات الزمنية المرتبطة

خطوات الحـــــــل

- نرسم المسألة بدقة ونحدد الثوابت والمتغيرات

(ندي المتغيرات رموز تعبر عنها والحاجة الثابتة نحط قيمتها على الرسم)

- طبقًا للمعطيات والمطلوب نوجد المعادلة المناسبة

ثم نعوض فيها بـ قيم الثوابت (المتغيرات متعوضش بقيمتها دلوقتي)

ولو عوضت قبل ماتشتق عادي بس متشتقش ناتج التعويض

- نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن ن

ثم نعوض فيها بـ قيم المتغيرات ومعدلاتها الزمنية ($\frac{د س}{د ن}$ .....)

ملاحظـــــات

- إحنا هنا شغالين بمعدلات زمنية ثابتة :

($\frac{د س}{د ن} = ٢$ ، $\frac{د ح}{د ن} = -٣$) مش متغيره ($\frac{د س}{د ن} = ن + ١$)

- تجنب تحط قيمة لأي متغير على الرسم لو سمحت (احترم المتغير شوية

علشان ميمسحش بكرامتك الأرض واديله رمز على الرسم)

- يمكن أستخدام العلاقة : $س = س_{.} + \frac{د س}{د ن} \times ن$

$س_{(ن)}$: قيمة س عند أي لحظة أو س كدالة في الزمن

حيث : $س = س_{(ن)}$ ، $س_{.}$ قيمة س الابتدائية (عند الزمن صفر) ، $\frac{د س}{د ن}$ معدل تغير س

وهو ثابت (شرط) ومن خلال هذه العلاقة يمكن التعبير عن أي متغير بدلالة الزمن

والعلاقة دي بتكون مفيدة جدًا في التمارين اللي بيطلب فيها زمن أو حاجة بعد

زمن معين . (متى ؟ أوجد معدل تغير المساحة بعد ٥ ث مثلاً ؟)

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

- إذا كان المتغير س :

(1) يزداد – يبتعد – يتمدد – يصب – يتراكم فإن : $\frac{د س}{د ن} > ٠$

(2) يتناقص – يقترب – ينكمش – يتسرب فإن : $\frac{د س}{د ن} < ٠$

(3) ثابت : $\frac{د س}{د ن} = ٠$

- اقرأ المسألة براحة وترجم المعطيات لرياضة واكتب لغة عربية (مش عيب) المهم إن السؤال يتحل ويتضمن .....

(4) إذا كان : • $\frac{د س}{د ن} = ٠$ طول الوقت ده معناه ان المتغير س ثابت

• $\frac{د س}{د ن} = ٠$ عند لحظة معينة يبقى عند اللحظة دي المتغير س توقف عن التغير [الزيادة أ، النقصان]

يعني لو : $\frac{د س}{د ن} = ٠$ عند ن = ٥ ف ده معناه إن عند ن = ٥ توقف عن التغير

(مش ثابت)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الوحدة الأولى تفاضل

أولًا : أهم أسئلة الاختيار من متعدد

1 إذا كان : $ص = هـ^{٢س} + س^{٥} - هـ + ١$

فإن : $ص'(١) =$ .....

(أ) $هـ(١ + ٢هـ)$ (ب) $\frac{١}{هـ}(هـ + ١)$

(جـ) ٠ (د) $٣هـ$

2 إذا كانت $د(س) = لـ_{هـ}(س + ١)$

فإن : $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} =$ .....

(أ) $\frac{-١}{(س + ١)^{٢}}$ (ب) $\frac{١}{(س + ١)^{٢}}$

(جـ) $\frac{١}{س + ١}$ (د) $\frac{-١}{س + ١}$

3 إذا كانت : $ص = لـ_{هـ}(١ + هـ^{س})$

فإن : $\frac{دص}{دس} =$ .....

(أ) $هـ^{ص}$ (ب) $هـ^{-ص}$ (جـ) $هـ^{١-ص}$ (د) $هـ^{ص-١}$

4 ينصهر مكعب من الثلج محتفظًا بشكله بمعدل ١ سم^{٣} / د ، فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه يساوي ٨ سم^{٣} يساوي ..... سم/د

(أ) $\frac{-١}{٨}$ (ب) $\frac{-١}{١٢}$ (جـ) $\frac{-١}{١٦}$ (د) $\frac{-١}{٢٤}$

5 إذا كان $ص = ٣^{٢}لـ_{٣}س$ ، فإن : $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} =$ .....

(أ) ٠ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٩}{س}$ (د) $\frac{٩}{س}لـ_{هـ}٣$

6 إذا كان د $(س) = ظاس(جتاس + جاس)$ ،

فإن د$'(س) =$ .....

(أ) $قا^{٢}س$ (ب) $-قا^{٢}س$ (جـ) $ظا^{٢}س$ (د) $-ظا^{٢}س$

7 مشتقة الدالة $س^{٢} + ٣$ بالنسبة إلى $\sqrt{س^{٢} + ١٦}$ عند $س = ٣$ تساوي .....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٥

8 إذا كان $ص = ن^{٢} + ٤ن$ ، $س = ٢ن - ١$

فإن $\frac{دس}{دص} =$ .....

(أ) $٢ن + ٤$ (ب) $\frac{١}{ن + ٢}$

(جـ) $ن + ٢$ (د) $\frac{ن + ٢}{٢}$

9 إذا كانت $س^{٢} + ٢سص + ص^{٢} = ٤س$

فإن $\frac{دص}{دس} =$ ..... عند النقطة $(١ ، ١)$

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٠ (د) -١

10 معادلة المماس لمنحنى الدالة د :

د $(س) = هـ^{٢س-١} + س$ عندما $س = \frac{١}{٢}$ هي .....

(أ) $ص = ٣س - ٣$ (ب) $٣ص = س$

(جـ) $ص = ٣س$ (د) $٣ص = س + ٣$

11 يتحرك جسيم على المنحنى :

$ص = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤$ وفي اللحظة التي فيها $س = ٢$ كانت المركبة السينية تتزايد بمعدل $\frac{١}{٢}$ وحدة / ث ، فإن معدل تغير المركبة الصادية عند تلك اللحظة = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٨

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب الستة WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

12 إذا كانت : $ص^{٢} - ٢|\overline{س}| = ٠$ فإن : $\frac{د ص}{د س} =$ .....

(أ) $\frac{٢ص}{|\overline{س}|}$ (ب) $|\overline{س}|$ (جـ) $\frac{ص}{س^{٢}}$ (د) $\frac{١}{ص^{٣}}$

13 إذا كان $٢ص هـ^{س} = ٣هـ^{٢س}$ ، فإن : $\frac{د ص}{د س} =$ .....

(أ) $-\frac{١}{٢}$ ص (ب) $-$ ص (جـ) $\frac{٣}{٢}$ ص (د) ص

14 إذا كان $هـ^{-س} = ص$، فإن : $هـ^{س} ص' =$ .....

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) هـ (د) $-$ هـ

15 إذا كانت الدالة ر : ر (س) = لـو$_{هـ}$ س هي الدالة العكسية للدالة ص = ر$^{-١}$ (س)، فإن : $\frac{د ص}{د س} =$ .....

(أ) $\frac{١}{س}$ (ب) $-\frac{١}{س}$ (جـ) هـ^{س} (د) هـ$^{-س}$

16 قيمة البارامتر ع التي يكون عندها للمنحنى :
س = ٢ع^{٣} − ٥ع^{٢} − ٤ع + ١٢، ص = ٢ع^{٢} + ع − ٤
مماس أفقي هي .....

(أ) $-\frac{١}{٢}$ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

17 قيمة البارامتر ن التي يكون عندها للمنحنى :
س = ٢ن^{٣} − ٥ن^{٢} − ٤ن + ١٢، ص = ٢ن^{٢} + ن − ٤
مماس رأسي هي .....

(أ) ٢ (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) أ، ب معًا

18 ميل المماس للمنحنى : جتا$|\overline{\pi ص}| = ٣س + ١$
عند النقطة $(-\frac{١}{٣}، \frac{\pi}{٤})$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) -٣

19 إذا كانت س = ٢ن^{٣} − ٥، ص = ٦ن^{٢} + ١
فإن $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ = ... عند ن = ١

(أ) ٣ (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) ٢ (د) $-\frac{١}{٢}$

20 إذا كان : ص = هـ$^{هـ^{س}}$ ، فإن : $\frac{د ص}{د س} =$ .....

(أ) $\frac{هـ^{هـ^{س}}}{هـ^{س}}$ (ب) هـ$^{هـ^{س}}$ (هـ^{س}) (جـ) $\frac{هـ^{هـ^{س}}}{هـ^{٢س}}$ (د) هـ^{٢س} هـ$^{هـ^{س}}$

21 إذا كان : ص = هـ$^{س^{٥}}$ ، فإن : $\frac{د ص}{د س} =$ .....

(أ) هـ$^{س^{٥}}$ س^{٥} (ب) $\frac{س^{٥} هـ^{س^{٥}}}{هـ}$
(جـ) هـ$^{س^{٥}}$ س$^{٥-١}$ (د) $\frac{س^{٥-١} هـ^{س^{٥}}}{هـ}$

22 إذا كانت ص = س^{٢} لـو$_{هـ}$ ($\frac{س}{هـ}$)، فإن $\frac{د^{٣}ص}{د س^{٣}}$ = ...
عند س = ٤

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٣

23 إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د (س) عند نقطة ما = $\frac{١}{٢}$ وكان الإحداثي السيني لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات / ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادي = ... وحدة / ث

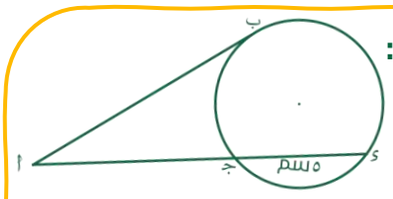
(أ) $-\frac{١}{٦}$ (ب) $-\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

24 إذا كانت : ص = قا س، ع = جتا س
فإن : $\frac{د^{٢}ص}{د ع^{٢}} =$ .....

(أ) ٢قا^{٣} س (ب) $-$٢ظا^{٣} س
(جـ) ٢ظا^{٣} س (د) $-$٢ظتا^{٣} س

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب الستة WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

25 في الشكل المقابل :



$\overline{ا ب}$ قطعة مماسية للدائرة ، $\overleftarrow{ا ء}$ قاطع لها بحيث جء = ٥ سم ، إذا كانت $\overleftarrow{جـ ا}$ تتمدد في الاتجاه $\overleftarrow{ء جـ}$ وكان معدل تغير طول $\overline{ا ب}$ يساوي ١ سم / د فإن معدل تغير طول $\overline{ا جـ}$ عندما يكون طولها ٤ سم يساوي ..... سم / د

(ا) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١٢}{١٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

26 مستطيل طوله ١٢ سم ، وعرضه ٥ سم ، فإذا كان الطول يتناقص بمعدل ١ سم / دقيقة بينما يتزايد العرض بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم / دقيقة فإن المساحة بعد ١ دقيقة .....

(ا) تزداد (ب) تتناقص

(جـ) تتوقف عن النقصان (د) تتوقف عن الزيادة

27 إذا كان : $ص = |هـ^{اس}|$ وكان : $ص'' - ٦ ص' + ٩ ص = ٠$

فإن : ا = ...

(ا) $\frac{١}{هـ}$ (ب) $٢ هـ^{-٣}$ (جـ) ٦ (د) -١

28 إذا كان : $\frac{ود ص}{ود س} = \frac{ا}{ص}$ وكانت : $ص^{٣} \frac{ود^{٢} ص}{ود س^{٢}} = -٨$ ،

ا ∈ ح$^{+}$ فإن : ا = ...

(ا) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $٢\sqrt{٢}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

29 إذا كانت : $ص = ٢ س^{٣ - ٢}$ وكانت $\frac{ود ص}{ود س} = ك س ص$

فإن : $هـ^{ك}$ = ...

(ا) ٣٢ (ب) $لـو_{هـ} ٢$ (جـ) $\sqrt{لـو_{هـ} ٢}$ (د) ٦٤

30 إذا كانت : $س = هـ^{جا \theta}$ ، $\frac{ود ص}{ود \theta} = ٢ لـو_{هـ} جتا \theta$

فإن : $\frac{ود ص}{ود س}$ = ... عندما θ = صفر

(ا) $\frac{٢}{هـ}$ (ب) ١ (جـ) هـ (د) $\frac{١}{هـ}$

31 إذا كانت : $ص = هـ^{س^{٢}} جا س$

فإن : $٢ \frac{ود ص}{ود س} - \frac{ود^{٢} ص}{ود س^{٢}}$ = ...

(ا) ٢ص (ب) ٤ص (جـ) ٥ص (د) ٨ص

32 إذا كانت : $ص = \frac{١}{لـو_{س} ١٠}$ وكانت $س^{٢} ص' = ا$

فإن : ا = ...

(ا) $\frac{-١}{٢} لـو هـ$ (ب) $\frac{١}{٢} لـو هـ$

(جـ) $\frac{-١}{٢} لـو_{هـ} ١٠$ (د) $\frac{١}{٢} لـو_{هـ} ١٠$

33 معادلة المماس للمنحنى : $ص = س^{٢ س}$ عند النقطة (١ ، ١) هي .....

(ا) $ص = \frac{س + ١}{٢}$ (ب) $ص = ٢ س - ١$

(جـ) $هـ ص + \frac{١}{هـ} س = ١$ (د) $\frac{١}{هـ} ص - هـ س = |هـ|$

34 إذا كانت : $س^{٢} - ص^{٢} = ٩$ وكان : $\frac{ود^{٢} ص}{ود س^{٢}} = \frac{ا}{ص^{٣}}$

فإن : ا = ...

(ا) ١ (ب) -١ (جـ) ٩ (د) -٩

35 إذا كان $ص = لـو_{هـ} ظا س$ حيث $س \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

فإن : $\frac{ود^{٢} ص}{ود س^{٢}}$ = ...

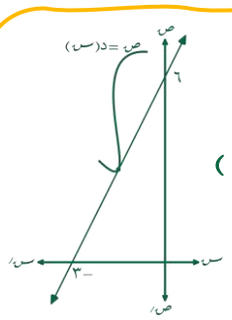
(ا) $-هـ^{٢ ص}$ (ب) $-هـ ص^{٢}$ (جـ) $هـ ص^{٢}$ (د) $هـ^{٢ ص}$

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بأ/ أحمد السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بأ/ طلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

36 إذا كان : $\frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{س^{٢}}{أ^{٢}} = ١$ حيث أ، ب ثوابت
فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ عند النقطة (أجاه، ب جاه) هي .....

(أ) $\frac{أ}{ب}$ ظاه (ب) $\frac{-أ}{ب}$ ظاه
(ج) $\frac{-ب}{أ}$ ظتاه (د) $\frac{ب}{أ}$ ظتاه

37 في الشكل المقابل :
المستقيم ل ↔ مماس لمنحنى
الدالة ص = د (س) عند (−٢، ك)
وكان : ر (س) = د (٢س)
فإن : ر′(−١) = ...



(أ) ٤ (ب) ٢ (ج) −٢ (د) −٤

38 نقطة تتحرك على المنحنى ص = ٢√س ،
فإذا كان معدل تغير بُعدها عن النقطة (٧،٠)
يساوي ٠،٢ وحدة طول / ث ، فإن معدل التغير
في إحداثيها السيني عندما س = ٤ وحدة
طول هو ..... وحدة طول / ث

(أ) −٠،٢ (ب) ٠،٢ (ج) ٠،٤ (د) −٠،٤

39 إذا كان : ص = $\frac{ع + ١}{ع - ١}$ ، س = $\frac{ع - ١}{ع + ١}$
فإن : $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ = ... عند ع = صفر

(أ) ٢ (ب) −٢ (ج) −٦ (د) ٦

40 إذا كان : ٣س^٢ + ص^٢ = ٤ ،
فإن : ص $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ + ($\frac{ء ص}{ء س}$)^٢ = ...

(أ) −٢ (ب) −٣ (ج) −٤ (د) −٦

41 إذا كان س^ص = هـ^(س−ص) ، فإنه عند النقطة (١، ١)
تكون قيمة $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) −١ (ب) ٠ (ج) ١ (د) −٢

42 إذا كان د (س^٢) = √(٢س^٢ − ١) ، فإن د′(١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) −٢ (د) −١

43 إذا كان ٣^ص = جاس + جتاس ، فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) لـو_٣ ٣^(جتاس−جاس)
(ب) $\frac{ص}{لـو ٣}$ (جتاس−جاس)
(ج) ٣^−ص لـو_٣ هـ^(جتاس−جاس)
(د) ص لـو_٣ هـ^(جتاس−جاس)

44 إذا كان لـو_أ ص = هـ^س ، فإن ص′ = ...

(أ) ص هـ^س لـو_أ (ب) هـ^س لـو_أ
(ج) ص لـو_أ (د) ص هـ^س لـو_أ هـ

45 إذا كان ص = م س + ٥ ، $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{٢}$
فإن $\frac{ء س}{ء ص}$ = ... عند النقطة (٢، ٣)

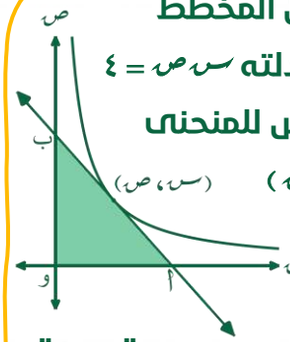
(أ) $\frac{٧}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{-٧}{٢}$

46 إذا كان هـ^ص = جتاس ، فإن ص′ + ١ = ...

(أ) (ص′)^٢ (ب) − (ص′)^٢ (ج) جتاس (د) −جتاس

الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

47 إذا كان الشكل المقابل يبين المخطط البياني للمنحنى الذي معادلته $س ص = ٤$ حيث $س > ٠$، $\overleftrightarrow{أب}$ هو المماس للمنحنى عند أي نقطة عليه $(س، ص)$ ويقطع محوري الإحداثيات على الترتيب في أ، ب، فإن مساحة سطح المثلث وأب = ... وحدة مربعة



(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

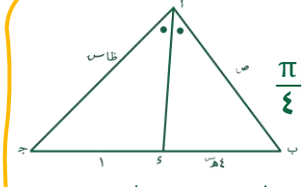
48 إذا كان $ص = \frac{س - ٢}{س + ٤}$، $(ص - ١)\ ص' = ك\ (ص')^٢$، فإن ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ١٤

49 المماس للمنحنى $ص = هـ^{\theta}$ جتاθ، $س = هـ^{\theta}$ جاθ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها .....

(أ) ٠ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

50 في الشكل المقابل :



$\frac{ود ص}{ود س}$ = ... عندما $س = \frac{\pi}{٤}$

(أ) ١٢ (ب) ١٢هـ^{٤} (جـ) ١٢هـ$^{\frac{١}{٤}\pi}$ (د) هـ$^{\frac{١}{٤}\pi}$

51 إذا كانت $س = جا(٢ع)$، $ص = جتا(٢ع)$، فإن : $\frac{ود^٢ ص}{ود س^٢}$ = ... عند $ع = \frac{\pi}{٢}$

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٠ (د) −٢

52 إذا كان : $ص = جا\theta$ ، $س = جتا\theta$ فإن : $ص\ ص'' + (ص')^٢$ = ...

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

53 إذا كانت $س$ هي قياس زاوية بالتقدير الدائري فإذا كان معدل تزايد ظلها يعادل ٨ أمثال معدل تزايد جيبها عدديًا فإن : $س$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

ثانيًا : أهم الأسئلة المقالية

54 إذا كانت $ص^٢ + ٢س ص = ٨$ أثبت أن :
$(س + ص)\ \frac{ود^٢ ص}{ود س^٢} + ٢\ \frac{ود ص}{ود س} + (\frac{ود ص}{ود س})^٢ = ٠$

55 إذا كان $س ص = جا س$ جتا$س$ أثبت أن :
$س\ \frac{ود^٢ ص}{ود س^٢} + ٢\ \frac{ود ص}{ود س} + ٤ س ص = ٠$

56 إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للمنحنى $ص = لـ_{هـ} \frac{س}{٢}$ في النقطة جـ $(١، ص)$ ويقطع محور السينات في النقطة أ، ومحور الصادات في النقطة ب أوجد طول $\overline{أب}$

57 إذا كان العمودي للمنحنى $ص = لـ_{هـ} ٢س$ عند النقطة أ $(١، لـ_{هـ} ٢)$ يقطع محور السينات في النقطة ب أوجد طول $\overline{أب}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

58 إذا كانت $ص = (س^٣ + ٥)^{س}$ أوجد $\frac{ود ص}{ود س}$

59 إذا كانت $ص = (جا س)^{ظا س}$ أوجد $\frac{ود ص}{ود س}$

60 إذا كانت $ص^٢ = ٣^{س} \times ٢^{ص}$ أوجد $\frac{ود ص}{ود س}$

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بأ.أحمد السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بأ.أحمد أطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

61 إذا كانت $ص = \sqrt{\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١}}$
أثبت أن : $(س^{٤}-١)ص'' + ٢س ص' = ٠$

62 يستند سلم طوله ٢٥٠ سم على حائط رأسي ، فإذا انزلق الطرف العلوي للسلم إلى أسفل الحائط بمعدل ١٠ سم / ث عندما يكون الطرف السفلي للسلم على بعد ٧٠ سم من الحائط أوجد :
(أ) معدل انزلاق الطرف السفلي للسلم
(ب) معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض

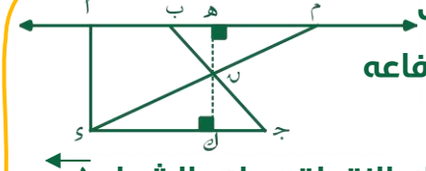
63 مثلث قائم الزاوية طولا ضلعي القائمة ١٢ سم ، ١٦ سم ، فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل ٢ سم / ث وكان طول الضلع الثاني يتناقص بمعدل ١ سم / ث
(أ) أوجد معدل تغير مساحة المثلث بعد ٣ ث
(ب) متى يصبح هذا المثلث مثلثًا متساوي الساقين ؟

64 جسم معدني على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، طول ضلعها يتزايد بمعدل ١ سم / د وارتفاعه يتناقص بمعدل ٢ سم / د . أوجد معدل تزايد حجمه عندما يكون طول ضلع قاعدته ٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم ،

65 يسير رجل طوله ١،٨ متر في خط مستقيم مقتربًا من قاعدة عمود إضاءة بمعدل ١،٢ متر / ث ، فإذا كان ارتفاع مصباح عمود الإضاءة ٥،٤ مترًا عن سطح الأرض أوجد :
(أ) معدل تغير طول ظل الرجل
(ب) معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٤،٨ مترًا من عمود الإضاءة

66 مثلث متساوي الساقين طول قاعدته $٢٠\sqrt{٣}$ إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم / ساعة . فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التي يكون فيها طول كل من الساقين مساويًا لطول القاعدة

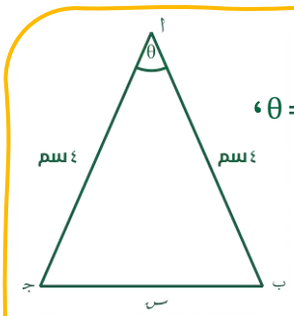
67 أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{ء جـ}$ // $\overline{أ ب}$ ، ارتفاعه يساوي ٣ سم ،
ء جـ = ٥ سم ، تتحرك النقطة م على الشعاع $\overleftarrow{أ ب}$ بسرعة ٤،٨ سم / ث مبتدأ من النقطة ب ، أوجد معدل تغير مساحة المثلث م ب ن في اللحظة التي يكون فيها م ب = ١ سم



68 يقف شخص على بُعد ٢٥ مترًا من قاعدة برج ارتفاعه ١٠٠ متر ويرصد زاوية ارتفاع جسم يسقط من قمة برج بسرعة منتظمة مقدارها ٣ متر / ثانية ، أوجد معدل تغير زاوية ارتفاع الجسم عندما يكون على بُعد ٢٥ متر من قاعدة البرج

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بأ.أحمد السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بأكاديمية جواب WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

26 في الشكل المقابل :



أ ب = أ جـ = ٤ سم ، ق (∠ أ) = θ ،
ومعدل الزيادة في قياس
69 الزاوية θ = ($\frac{١}{٥}$) كل ثانية ،
أوجد معدل الزيادة في
طول $\overline{ب جـ}$ عند اللحظة التي يكون فيها المثلث
أ ب جـ متساوي الأضلاع

26 إذا انزلق طفل على زحلوقة على شكل جزء
لمنحنى الدالة د (س) = $هـ^{س}$ ، وإذا كانت سرعة
الإحداثي الصادي لمسار الطفل تساوي هـ
70 وحدة سرعة عندما كان الإحداثي السيني
يساوي ١ وحدة طول ، فأوجد عند نفس اللحظة
سرعة الإحداثي السيني

25 في الشكل المقابل :

نحلة من الحديد المصمت
مكونة من مخروط دائري قائم
ونصف كرة ، وكان ارتفاع المخروط
يزيد عن نصف قطر الكرة بمقدار ٢ سم
71 تتمدد بالحرارة بحيث تظل محتفظة
بشكلها وإذا كان معدل التغير في ارتفاع
المخروط $\frac{١}{\pi}$ سم / د ، فاحسب معدل تغير حجم
النحلة في اللحظة التي يكون فيها طول
نصف قطر الكرة ٣ سم ، (علمًا بأن حجم
المخروط = $\frac{١}{٣}$ π $نق^{٢}$ ع ، حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π $نق^{٣}$)

72 أوجد قيمة (قيم) س التي تجعل للمنحنى :
ص = ٩$س^{٣}$ − ٨ لـو س مماس أفقي

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب الستة WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

سادسًا : ملخص معادلة المستقيم

الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ مستقيم في الفراغ حيث : أ ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) نقطة معلومة عليه

• $\overrightarrow{هـ}$ (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه له (نسب إتجاهه) فإن :

• الصورة المتجهه لمعادلة المستقيم :

$\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك\overrightarrow{هـ}$ حيث $ك \in ح$*

• حيث : $\overrightarrow{ر}$ = (س ، ص ، ع) وتمثل إحداثيات أي نقطة على الخط وكل قيمة لـ ك نحصل منها على نقطة جديدة على الخط .

[لو حطيت ك بـ صفر هتحصل على نفس النقطة اللي معاك ياكلدون]

• الصورة البارامترية لمعادلة المستقيم : (أهم صورة لاني بستخدمها لـو عايز تقاطع مستقيم مع أي حد)

$س = س_1 + ك أ$ ، $ص = ص_1 + ك ب$ ، $ع = ع_1 + ك جـ$

• وتكون إحداثيات أي نقطة على المستقيم هي :

($س_1 + ك أ$ ، $ص_1 + ك ب$ ، $ع_1 + ك جـ$)

• الصورة الإحداثية (المتماثلة / الكارتيزية) لمعادلة المستقيم :

$$\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{جـ}$$

(تستخدم لتحديد إذا كانت النقطة تقع على المستقيم أم لا)

ملاحظات على الصورة الإحداثية:

● إذا كان أ = ٠ تصبح المعادلة ← $\frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{جـ}$ ، $س = س_1$

مستقيم أي نقطة عليه عندها س ثابتة وتساوي $س_1$

مستقيم // المستوى ص ع أو يقع فيه

لو : $س_1$ = ٠ يبقى واقع فيه

لو : $س_1$ ≠ ٠ يبقى بيوازيه

● إذا كان ب = ٠ تصبح المعادلة ← $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ع - ع_1}{جـ}$ ، $ص = ص_1$

مستقيم أي نقطة عليه عندها ص ثابتة وتساوي $ص_1$

مستقيم // المستوى س ع أو يقع فيه

لو : $ص_1$ = ٠ يبقى واقع فيه

لو : $ص_1$ ≠ ٠ يبقى بيوازيه

● إذا كان جـ = ٠ تصبح المعادلة ← $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب}$ ، $ع = ع_1$

مستقيم أي نقطة عليه عندها ع ثابتة وتساوي $ع_1$

مستقيم // المستوى س ص أو يقع فيه

لو : $ع_1$ = ٠ يبقى واقع فيه

لو : $ع_1$ ≠ ٠ يبقى بيوازيه

ENG. AHMED ESSAM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK

ملاحظات على معادلة المستقيم

- **معادلة محور س** ← ص = ٠ ، ع = ٠
  وبناءً عليه معادلة أي مستقيم يوازي محور س ويمر بالنقطة (س١ ، ص١ ، ع١)
  هي ← ص = ص١ ، ع = ع١

- **معادلة محور ص** ← س = ٠ ، ع = ٠
  وبناءً عليه معادلة أي مستقيم يوازي محور ص ويمر بالنقطة (س١ ، ص١ ، ع١)
  هي ← س = س١ ، ع = ع١

- **معادلة محور ع** ← س = ٠ ، ص = ٠
  وبناءً عليه معادلة أي مستقيم يوازي محور ع ويمر بالنقطة (س١ ، ص١ ، ع١)
  هي ← س = س١ ، ص = ص١

الصور المختلفة لمعادلة أي مستقيم يمر بنقطة الأصل ، متجه اتجاهه (أ ، ب ، جـ) :

- $\overleftrightarrow{ر} = ك$ (أ ، ب ، جـ) ← **الصورة المتجهه**

[خانة النقطة مش مكتوبة]

- س = كأ ، ص = كب ، ع = كجـ ← **المعادلة البارامتريـــــة**

[مفيش أرقام مجموعة على الـ ك]

- $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{جـ}$ ← **الصورة الإحداثيـــــة**

[مفيش ارقام مجموعة على س ، ص ، ع]

● **تستخدم الصورة البارامتريـــــة في :**

إيجاد نقطة أو نقط على المستقيم أو تستخدم أيضًا الصـــورة البارامترية لإيجاد نقطة أو نقط تقاطع مستقيم مع أي سطح آخر (مستـــوى - كرة - مستقيم آخر .....) وهي أهم صورة في الـ ٣ صور بينما تستخدم الصورة الإحداثيـــة لمعرفة ما إذا كانت نقطة تقع على المستقيم أم لا

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

ملاحظات على متجه الاتجاه

- إذا علمت نقطتان ا ، ب على المستقيم فإن متجه اتجاه المستقيم $\overleftarrow{ا ب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{ا}$
- جيوب تمام اتجاه المستقيم هي متجه وحدة في اتجاه المستقيم ويمكن اعتباره متجه اتجاهه
- المستقيم الذي يصنع مع محاور الاحداثيات زوايا متساوية في القياس تكون :
  جيوب تمام اتجاهه = $\pm$ ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$) ويمكن اعتبار :
  متجه اتجاهه = (١ ، ١ ، ١)
- إستنتاج متجه الاتجاه من الـ ٣ صور :
- من الصورة المتجهه : متجه الاتجاه = المتجه المضروب في ك
- من الصورة البارامترية : متجه الاتجاه = (معامل ك ، معامل ك ، معامل ك)
- من الصورة الإحداثية : متجه الاتجاه = ($\frac{\text{المقام}}{\text{معامل س}}$ ، $\frac{\text{المقام}}{\text{معامل ص}}$ ، $\frac{\text{المقام}}{\text{معامل ع}}$)

ولو كايز تجيب النقطة من الصورة الإحداثية تساوي البسط بـ صفر

ولو عايز تجيب النقطة من الصورة البارامترية هي الحدود المطلقة بالترتيب أو حط ك بأي قيمة

علاقة نقطة بمستقيم

أولًا : تحديد ما إذا كانت النقطة تقع على المستقيم أم لا :

- نعوض بالنقطة في الصورة الإحداثية لمعادلة المستقيم ، وإذا :

(1) حققت النقطة الصورة الإحداثية فإنها : ← تقع على المستقيم ومنها نحصل على ك

(2) غير ذلك : فهي لا تقع عليه .

ثانيًا : إيجاد أقصر بُعد (البعد العمودي لنقطة عن المستقيم) :

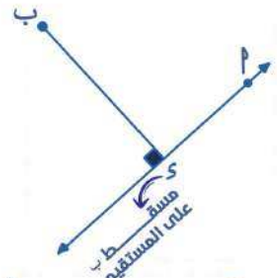
- لإيجاد بُعد النقطة ب ($س_{م}$ ، $ص_{م}$ ، $ع_{م}$) عن المستقيم : $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ا} + ك \overleftarrow{هـ}$
- تتحق إذا كانت النقطة ∋ للمستقيم أم لا :
- إذا كانت ب ∋ المستقيم فإن ← البعد = صفر
- إذا كانت ب ∌ المستقيم فإن :

البعد = $\frac{\| \overleftarrow{ا ب} \times \overleftarrow{هـ} \|}{\| \overleftarrow{هـ} \|}$ حيث : ا أي نقطة على الخط ، وهو نفس قانون إيجاد طول العمود الساقط من نقطة على خط عمل $\overleftarrow{ن}$ بإعتبار $\overleftarrow{ن} = \overleftarrow{هـ}$

ENG. AHMED ESSAM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ثالثًا : إيجاد مسقط نقطة على المستقيم :

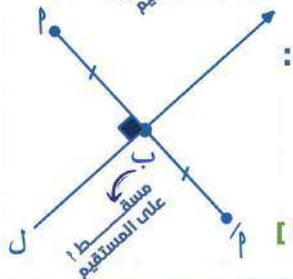
- مسقط ا على $\overleftrightarrow{ل}$ يعني لما ينزل من ا عمود على $\overleftrightarrow{ل}$ هيقطعه في أنهي نقطة
- مسقط النقطة ب على المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ هي النقطة ء ، ولإيجاد ء نحل المعـــــادلة :
$\overrightarrow{ب ء} . \overrightarrow{هـ} =$ صفر ، حيث : هـ متجـه اتجـــاه $\overleftrightarrow{ل}$ ، نحصل على قيمة ك الخاصة بـ ء ومنها نحصـــــــل على ء ← (المسقط)



- لإيجاد صورة نقطة بالإنعكاس في مستقيم :
(صورة ا بالإنعكاس ا َ في المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$)

$$\therefore \text{ا َ} = 2\text{ب} - \text{ا}$$

[المسقط ينصف القطعة الواصلة بين النقطة وصورتها]



الزاوية بين مستقيمين في الفراغ

- **إذا كان :** $\overleftrightarrow{ل_1} : \overrightarrow{ر_1} = \overrightarrow{ا_1} + ك_1 \overrightarrow{هـ_1}$ ، $\overleftrightarrow{ل_2} : \overrightarrow{ر_2} = \overrightarrow{ا_2} + ك_2 \overrightarrow{هـ_2}$

وكانت θ **الزاوية بيـــــن** $ل_1$ ، $ل_2$ **فإن :**

$$\text{القانون} \quad \text{جتا}\theta = \frac{|\overrightarrow{هـ_1} . \overrightarrow{هـ_2}|}{\|\overrightarrow{هـ_1}\| \ \|\overrightarrow{هـ_2}\|}$$

"المقياس مكانش موجود في الزاوية بين متجهين لإن هنا معرفش خارجين ولا داخلين في الزاوية علشان كدة بنحط مقياس ناخد الزاوية الصغرى مجرد إتفاق بينا "

لاحـظ : لو الزاوية بين مستقيمين ٦٠° مثلا أو أي زاوية أخري فـ ده مش معناه إنهم متقاطعين لأن الزاوية بين المستقيمين زاوية بين اتجاهاتهم !

يعني ممكن يكونوا متخالفين بس فيه بينهم زاوية عادي

البُعد بين مستقيمين متوازيين

يساوي طول العمود الساقط من (نقطة تقع على أحدهما) على (المستقيم الأخر)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تحديد علاقة مستقيمات ببعض

الأول نشوف هل $هـ_1 // هـ_2$ ؟

آه

يبقى المستقيمات متوازيان أ، متطابقان وساعتها علشان نحدد ناخد نقطة من واحد منهم ونعوض بيها في الصورة الإحداثية للتاني ولو :

- حققت → تطابقوا
- محققتش → توازوا

لا

أ أي نقطة من الأول

ب أي نقطة من الثاني

يبقى المستقيمات متقاطعان أ، متخالفان وساعتها هنعمل : $\overrightarrow{أب} \cdot هـ_1 \times هـ_2$ ولو طلع بصفر يبقى كدة تقاطعوا ولو طلع مش بـ صفر يبقى كدة متخالفان

لاحظ :

(١) لإيجاد نقطة تقاطع مستقيمين : نساوي معادلتهم البارامترية ببعض ونجيب $ك_1$ أو $ك_2$ ومنها نجيب التقاطع

(٢) لو جه في مسألة قالك إن المستقيمين متقاطعين يبقى : $\overrightarrow{أب} \cdot هـ_1 \times هـ_2 = ٠$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

سابعًا : ملخص معادلة المستوى

الصور المختلفة لمعادلة المستـــــوى

• إذا كانت أ (س١ ، ص١ ، ع١) نقطة معلومة في المستوى ط وكـــــان المتجه : $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ب ، جـ) متجه إتجاه عمودي على المستوى (جميع المتجهات العمودية على المستوى تكون متوازية) فتكـــون :

الصـــورة المتجهه لمعادلة المستوى :

• $\overrightarrow{ر} . \overrightarrow{ن} = \overrightarrow{ن} . \overrightarrow{أ}$ أو $\overrightarrow{ن} . \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} . \overrightarrow{أ}$

لاحظ : [$\overrightarrow{ن}$ متجه موضع أي نقطة في المستوى = مقدار ثابت]

• حيث : $\overrightarrow{ر}$ = (س ، ص ، ع) وتمثل إحداثيات أي نقطة في المستوى.

[يعني $\overrightarrow{ر}$ هي معادلة المستـــــــــــوى]

الصـــورة القياسية لمعادلة المستوى :

• أ (س − س١) + ب (ص − ص١) + جـ (ع − ع١) = صفر

لاحظ : صورة نادرة الإستعمال وفكها يعطـي الصـــورة العامـــة

الصـــورة العـــامة لمعادلة المستوى : (دي الصورة اللي بنحب نشتغل بيها)

• أ س + ب ص + جـ ع + ء = صفر

الخلاصة : لتعيين معادلة مستوى يلزم معرفة نقطة عليه ومتجه اتجاه عمودي عليه أ، يلزم معرفة $\overrightarrow{ن}$ ، ء

ملاحظات على المتجه العمودي :

● إذا عُلم ثلاث نقط في المستوى ليس على إستقامة واحدة أ ، ب ، جـ فإن :

$\overrightarrow{ن}$ // $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ}$ [أو $\overrightarrow{ب جـ} \times \overrightarrow{أب}$ أو $\overrightarrow{أجـ} \times \overrightarrow{ب أ}$]

● إذا عُلم مستقيمان متقاطعان فيه : $\overleftrightarrow{ل_١}$: $\overrightarrow{ر_١} = \overrightarrow{أ_١} + ك_١ \overrightarrow{هـ_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$: $\overrightarrow{ر_٢} = \overrightarrow{أ_٢} + ك_٢ \overrightarrow{هـ_٢}$

فـــــإن : $\overrightarrow{ن}$ // $\overrightarrow{هـ_١} \times \overrightarrow{هـ_٢}$ أو $\overrightarrow{ن}$ // $\overrightarrow{أ_١ أ_٢} \times \overrightarrow{هـ_١}$ أو أي نقط أخرى على المستقيمين نكون بهما متجه.

ولو المستقيمان متوازيان مينفعش نشتغل بـ دي

● إذا عُلم مستقيم في المستوى ونقطة اخري لا تقع في المستقيم لكنها في المستوى : فمثلاً إذا كان المستوى يحوي النقطة ب والمستقيم : $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك \overrightarrow{هـ}$

حيث : ب ∉ المستقيم فإن : $\overrightarrow{ن}$ // $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{هـ}$ أو $\overrightarrow{ن}$ // $\overrightarrow{ب جـ} \times \overrightarrow{هـ}$

حيث : جـ أي نقطة أخرى على المستقيم

● إذا عُلم مستقيم في المستوى ومستقيم آخر خارج المستوى ولكن يوازيه :

$\overrightarrow{ن}$ // $\overrightarrow{هـ_١} \times \overrightarrow{هـ_٢}$

من الآخر :

● $\overrightarrow{ن}$ // الضرب الاتجاهي لمتجهين هو عمودي عليها [$\overrightarrow{ن}$ العمودي عليهما]

● $\overrightarrow{ن}$ يكون عمـــــــــودي علـــــى :

● أي مستقيم (متجه) في المستوى ● أي مستقيم (متجه) يوازي المستوى

● أي متجه عمودي على المستوى العمودي على مستواه

ENG. AHMED ESSAM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK

إيجاد معادلة مستوى بمعلومية الأجزاء المقطوعة من المحاور :

- **إذا قطع المستوى محـــاور الإحداثيـــات في النقط :**
  أ (س١ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ص١ ، ٠) ، جـ (٠ ، ٠ ، ع١) **فإن : معادلة المستوى تكون :**

$$\frac{س}{س_1} + \frac{ص}{ص_1} + \frac{ع}{ع_1} = 1$$

- وإذا كانت م (ل ، ب ، ك) هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث أ ب جـ فإن معادلة المستوى هي :

$$\frac{س}{ل} + \frac{ص}{ب} + \frac{ع}{ك} = 3$$

لاحظ : الأجزاء المقطوعة قد تكون موجبة أو سالبة ولكن أطوال الأجزاء المقطوعة دائمًا موجبة

ملاحظات عامة على معادلة المستـــوى

- **من المعادلة العامة لمعادلة المستوى ط : أ س + ب ص + جـ ع + ء = صفر**
  نجـــد أن :
  (أ) $\overleftarrow{ن}$ = (أ ، ب ، جـ) { **معاملات** س ، ص ، ع } ، ء = − أ . $\overleftarrow{ن}$
  حيث أ أي نقطة في المستـــــوى.

(ب) **إذا كانت** ء = صفر **فإن : المستوى يحوي نقطة الأصل**

(جـ) **إذا كانـــــت :**

- أ = صفر ، **فإن : المعادلة تصبح :** ب ص + جـ ع + ء = ٠
  وهي معادلة مستوى يوازي محور س **وعموديًا على المستوى** ص ع
- ب = صفر ، **فإن : المعادلة تصبح :** أ س + جـ ع + ء = ٠
  وهي معادلة مستوى يوازي محور ص **وعموديًا على المستوى** س ع
- جـ = صفر ، **فإن : المعادلة تصبح :** أ س + ب ص + ء = ٠
  وهي معادلة مستوى يوازي محور ع **وعموديًا على المستوى** س ص

فمثلًا ٢س − ٣ص = ٦ **وهي معادلة مستوى يوازي محور** ع **وعموديًا على المستوى** س ص

(ء) **إذا كانـــــت :**

- أ = ء = ٠ : **المعادلة** ← ب ص + جـ ع = ٠
  وهي معادلة مستوى يحوي محور س **وعموديًا على المستوى** ص ع
- ب = ء = ٠ : **المعادلة** ← أ س + جـ ع = ٠
  وهي معادلة مستوى يحوي محور ص **وعموديًا على المستوى** س ع
- جـ = ء = ٠ : **المعادلة** ← أ س + ب ص = ٠
  وهي معادلة مستوى يحوي محور ع **وعموديًا على المستوى** س ص

فمثلًا ٢س − ٣ص = ٠ **وهي معادلة مستوى يحوي محور** ع **وعموديًا على المستوى** س ص

ملحوظة مهمه جداً :

عدم وجود المتغير في المعادلة للمستوى يؤثر على $\overleftarrow{ن}$ ولا يؤثر على النقطة بمعني :
اللي يغيب من معادلة المستوى يبقي المستوى بيوازيه

ENG. AHMED ESSAM | ENG/AHMED ESSAM ELDIN | WWW.MRAHMEDESSAM.COM | WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظات عامة على معادلة المستوى

- معادلة المستوى س ص هي : ع = ٠ ده مش معناه إن اي نقطة عليه (٠ ، ٠ ، ٠) { لغياب س ، ص } وإنما ده معناه :

إن اي نقطة عليه (X ، Y ، ٠) (اي حاجة ، اي حاجة ، ٠)

إذا كانت معادلة المستوى ط
هي : ٣س – ٢ع = ٥ فإن اي نقطة عليه مش عندها ص = ٠ وإنما ص = اي حاجة
(وممكن تكون ص = ٠ ولكن دي مش قاعدة)

لاحظ الفرق :

- ص + ع = أ معادلة مستوى يوازي محور س
- س = ب معادلة مستوى يوازي المستوى ص ع
- ص + ع = أ ، س = ب معادلة خط مستقيم اي نقطة عليه عندها س ثابتة وتساوي ب

علاقة نقطة بـ مستوى

- إذا كانت معادلة المستوى ط هي أس + ب ص + جـ ع + ء = ٠ " لازم تكون المعادلة كدة يعني يكون طرفها الشمال يساوي صفر " وكانت : هـ (س١ ، ص١ ، ع١) ، و (س٢ ، ص٢ ، ع٢) ، ز (س٣ ، ص٣ ، ع٣) ثلاثة نقط في الفراغ وكان التعويض عنهم في معادلة المستوى كالتالي :

- أس١ + ب ص١ + جـ ع١ + ء = ٠ تقع في المستوى
- أس٢ + ب ص٢ + جـ ع٢ + ء < ٠ تقع في جهة ما من المستوى
- أس٣ + ب ص٣ + جـ ع٣ + ء > ٠ تقع في الجهة الأخرى من المستوى

- **إيجاد بُعد نقطة عن المستوى :**

إذا كانت ك (س١ ، ص١ ، ع١) ∉ المستوى ط حيث :

- ط : أس + ب ص + جـ ع + ء = ٠ **فإن :** ل = $\frac{|\text{ك} \cdot \text{ن} + \text{ء}|}{||\text{ن}||} = \frac{|\text{أس}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ ع}_1 + \text{ء}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}}$

لاحظ بُعد نقطة الأصل عن مستوى يمكن إيجاده مباشرة من القانون :

$$\text{ل} = \frac{|\text{ء}|}{||\text{ن}||}$$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
D.M.RAZK
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

توازي وتطابق وتعامد مستويين

- أولًا : توازي وتطابق وتقاطع مستويين :

إذا كـــان :

$ط_1 : أ_1 س + ب_1 ص + جـ_1 ع + ء_1 = 0$ ، $ط_2 : أ_2 س + ب_2 ص + جـ_2 ع + ء_2 = 0$

• فإذا كـــان : $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} \neq \frac{جـ_1}{جـ_2}$ **فإن :**

$ط_1 // ط_2$ ($\overleftrightarrow{ب_1 ب_2} // \overleftrightarrow{ب_1 ب_2}$ ، نقطة من أحدهما لا تحقق الآخر)

• وإذا كـــان : $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2} = \frac{ء_1}{ء_2}$ **فإن :**

$ط_1$ ، $ط_2$ متطابقان ($\overleftrightarrow{ب_1 ب_2} // \overleftrightarrow{ب_1 ب_2}$ ، نقطة من أحدهما تحقق الآخر)

• وكـــان : $\frac{أ_1}{أ_2}$ ، $\frac{ب_1}{ب_2}$ ، $\frac{جـ_1}{جـ_2}$ **ليست جميعها متساوية فإن المستويات يكونا غير متطابقين وغير متوازيين ويكونا متقاطعين في خط يســـــــمى (خط تقاطع المستويين) ويمكن إيجاد :**

(أ) متجه اتجاهه : $\overleftarrow{هـ} = \overleftrightarrow{ن_1} \times \overleftrightarrow{ن_2}$

(ب) نقطة عليه : عن طريق وضع اي متغير (ع مثلًا) باي قيمة في معادلتي المستويين وحلهما فنستنتج نقطة على خـــــــط تقاطع المستويين. (نقطة تقع في كلا المستويـــن)

ملاحظ : خط تقاطع المستويين وهو خط يقع في كلا المستويين وأي نقطة عليه هي نقطة في كلا المستويين

ثانيًا : تعامد مستويـــــــن :

إذا كـــان : $\overleftrightarrow{ن_1} \perp \overleftrightarrow{ن_2}$ { $\overleftrightarrow{ن_1} . \overleftrightarrow{ن_2} = 0$ } **فـــــإن** $ط_1 \perp ط_2$

ثالثًا : الزاوية بين مستويـــــن :

$$جتا\theta = \frac{|\overleftrightarrow{ن_1} . \overleftrightarrow{ن_2}|}{||\overleftrightarrow{ن_1}|| \, ||\overleftrightarrow{ن_2}||}$$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

البعد بين مستويين متوازيين

- **إذا كـــان :**

$ط_1 : أ_1 س + ب_1 ص + جـ_1 ع + د_1 = 0$ ، $ط_2 : أ_2 س + ب_2 ص + جـ_2 ع + د_2 = 0$

- **وكـــان :** $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2} \neq \frac{د_1}{د_2}$ (المستويان متوازيان وغير متطابقان)

فإن : البعد بينهما = بُعد نقطة من أحدهما عن الاخر

- **يعني مثلًا :**

البعد بينهما = بُعد (نقطة من $ط_1$) عن $ط_2$ أو = بُعد (نقطة من $ط_2$) عن $ط_1$

وإذا كان لهما نفس الـ $\overrightarrow{ن}$ فيمكن إيجاد البُعد بينهما مباشرة بالقانون

$$\frac{|د_1 - د_2|}{||\overrightarrow{ن}||}$$

علاقـــــة مستقيم بمستوى

- **أولًا : تحديد ما إذا كان المستقيم يقع في المستوى أم لا ؟**

إذا كان : $ل : \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك\overrightarrow{هـ}$ ، $ط : ب س + جـ ص + د ع + و = 0$

- **إذا كـــان :**

(1) $\overrightarrow{هـ} . \overrightarrow{ن} = 0$ ($\overrightarrow{هـ} \perp \overrightarrow{ن}$)

(2) **ونقطة من المستقيم لا تحقق معادلة المستوى**

∴ فإن : المستقيم // المستوى (خارج المستوى)

$[ط \cap ل = \varnothing]$

- **إذا كـــان :**

(1) $\overrightarrow{هـ} . \overrightarrow{ن} = 0$ ($\overrightarrow{هـ} \perp \overrightarrow{ن}$)

(2) **ونقطة من المستقيم تحقق معادلة المستوى**

∴ فإن : ل ⊂ ط (المستقيم يقع في المستوى)

$[ل \cap ط = ل]$

- **إذا كان :** $\overrightarrow{هـ} \cdot \overrightarrow{ن} \neq 0$ **فإن :**

ل # ط ، ل ⊄ ط فإن المستقيم يقطع المستوى في نقطة ويميل عـــليه بزاوية لإيجادهذه النقطة نعوض بالمعادلات البارامترية للمستقيم في معـــادلة المستوى فنحصل قيمة ك ومنها نحصل على نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى

- **الزاوية بين مستقيم ومستوى :**

$$جا\theta = \frac{|\overrightarrow{ن} . \overrightarrow{هـ}|}{||\overrightarrow{ن}|| \, ||\overrightarrow{هـ}||} = جتا\alpha$$

θ : الزاوية بين المستقيم والمستوى

α : الزاوية بين المستقيم والعمودي على المستوى

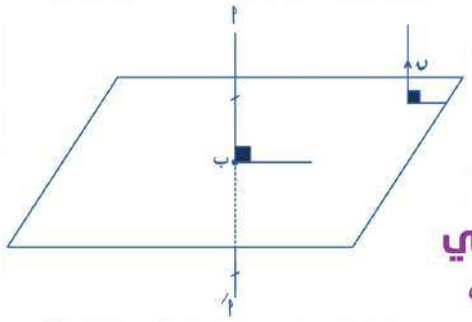
- **ثانيًا : تعامد مستقيم على المستوى :**

إذا كان : $\overrightarrow{هـ} // \overrightarrow{ن}$ **فـــــإن :** $ل \perp ط$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

إيجاد مسقط نقطة على المستـــــــــوى

- ب : مسقط ا على المســـــــتوى
- ا َ : صورة ا بالانعكاس في المستوى



- لإيجـــاد ب (مسقط ا على المستوى) :
- نوجد معادلة $\overleftrightarrow{ا ب}$: $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{ا}$ + ك $\overrightarrow{ن}$
[$\overrightarrow{هـ}$ = $\overrightarrow{ن}$ حيث $\overleftrightarrow{ل ط} \perp$ ، $\overrightarrow{هـ} // \overrightarrow{ن}$]
- نعوض بالمعادلات البارامترية للمستقيم في معادلة المستوى فنحصل على ك ومنها ب

- لإيجـــاد ا َ (صورة ا بالانعكاس في المستوى) :
- نوجد ب (المسقط)
- ب منتصف $\overline{ا ا َ}$ ، ومنها : $\overrightarrow{ا َ}$ = ٢ $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{ا}$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

الوحدة الثانية هندسة فراغية

أولًا : أهم أسئلة الاختيار من متعدد

25 إذا كان المستقيم
1 ل١ : $\overrightarrow{r_1}$ = (٢، ٣، ٠) + ك١ (٣ ، م، −٤) عمودي على المستقيم ل٢ : $\frac{س}{-٤} = \frac{ص+١}{٦} = \frac{٥-ع}{ك}$
فإن قيمة : ٣م + ٢ك = ...
(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٢

25 قياس الزاوية بين المستقيمين
2 ل١ : $\frac{س-١}{-٢} = \frac{ع-٢}{٢}$ ، ص = −١،
ل٢ : $\frac{ص-٤}{-٣} = \frac{ع+٥}{-٣}$ ، س = ١
يساوي .....
(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

25 قياس الزاوية بين المستويين
3 س + ٢ص + ع − ٧ = ٠،
٢س + ص − ع + ٥ = ٠ يساوي .....
(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$

25 قياس الزاوية بين المستوى
4 ٣س − ٤ص + ٥ع = ١ والمستوى س ص هو .....°
(أ) ٩٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

26 قياس الزاوية بين المستقيم :
5 $\overrightarrow{r}$ = (١، ٢، ٣) + ك (٩، ٤، −٢)
والمستوى : ٣س + ٤ص + ٥ع = ٦٠
يساوي ..... لأقرب درجة
(أ) ٢٨° (ب) ٦٢° (جـ) ٩° (د) ١٢٨°

26 إذا كان الخط المستقيم
6 س = $\frac{١}{٢}$ ص = ع يوازي المستوى
س + ٢ص + أ ع + ٥ = ٠
فإن : أ = ...
(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) −٤ (د) −٥

26 قياس الزاوية بين المستقيم
7 $\frac{١}{٢}$ س = $\frac{١}{٣}$ ص = $\frac{١}{٤}$ ع والمستوى (٤، ٦، ٨) . $\overrightarrow{r}$ = ٦ يساوي .....
(أ) ٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

26 إذا كان المستقيمان :
8 $\overrightarrow{r_1}$ = (−٢$\overrightarrow{س}$ + ٣$\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$)
+ ك١ (٥$\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$)،
$\overrightarrow{r_2}$ = (٣$\overrightarrow{س}$ − ٣$\overrightarrow{ص}$ + ٥$\overrightarrow{ع}$)
+ ك٢ (م$\overrightarrow{س}$ − ٥$\overrightarrow{ص}$ + ٥$\overrightarrow{ع}$) متعامدين
فإن قيمة م = ...
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٥

26 قياس الزاوية بين المستقيم :
9 $\frac{س-٣}{٢} = \frac{ع+١}{-٢}$ ، ص = ١ والمستوى :
س + ٢ص − ٢ع + ٥ = ٠ يساوي .....
(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

26 إذا كان المستقيمان

10 ل١ : $\overrightarrow{ر}$ = (−٢، ٣، ١) + ك١ (٣، −١، ١)

ل٢ : $\overrightarrow{ر}$ = (٣، −٣، ٥) + ك٢ (م، −٢، ٢)

متوازيان ، فإن : م = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) −٢ (د) −٥

26 إذا كان المستويين :

11 (م، −١، ٤) ، $\overrightarrow{ر}$ = ٥، ٣س + ٢ع = ٤ + ص متعامدان

فإن : م = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) −٣

إذا كان : ط١ : ص = ٤ ط٢ : س − ٣ص + ٥ع = ١

12 فإن قياس الزاوية بين المستويين يساوي .....

(أ) ٥٢,٣٣° (ب) ٢٣,٤٢° (جـ) ٥٩,٥٣° (د) ٦٢,٤°

إذا كانت θع هي الزاوية التي يصنعها المستقيم

13 المار بالنقطة (٣، −١، ١) ونقطة الأصل مع

الاتجاه الموجب لمحور ع فإن جتاθع = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{١١}}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{١٣}}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{١٥}}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{١٧}}$

قياس الزاوية بين المستقيمين

14 اللذين جيوب تمام اتجاهيهما هي

$(\frac{٢}{٣}، \frac{-٢}{٣}، \frac{١}{٣})$ ، $(\frac{١}{\sqrt{٢}}، \frac{١}{\sqrt{٢}}، ٠)$ يكون .....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$

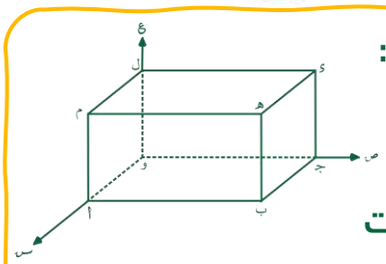
25 قياس الزاوية بين المستقيمين

15 ٢س = ٣ص = −ع ، ٦س = −ص = −٤ع

يساوي .....°

(أ) صفر (ب) ٤٥ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

25 في الشكل المقابل :



إذا كان و.أ ب جـ و هـ م ل

متوازي

16 مستطيلات إحداثيات

نقطة هـ (٣، ٤، ٥) فإن قياس الزاوية بين

المستقيمين $\overleftrightarrow{وهـ}$ ، $\overleftrightarrow{لهـ}$ = ...°

(أ) ٣٧ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

طول العمود المرسوم من النقطة

17 (١، ٥، −٤) على المستوى الذي معادلته

٣س − ص + ٢ع = ٦ يساوي ..... وحدة طول

(أ) $\frac{\sqrt{١٤٨}}{٧}$ (ب) $\frac{\sqrt{١٤٥}}{٧}$ (جـ) $\frac{\sqrt{١٤٢}}{٧}$ (د) $\frac{\sqrt{١٤}}{٧}$

البعد العمودي من النقطة (٣، −١، ٧)

18 للمستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢، −١) ، (٠، ٣، ٥)

يساوي ..... وحدة طول

(أ) ٥,٣٨ (ب) ٦,٢٤ (جـ) ٣,٦٧ (د) ٤,٣٢

طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ١، −٤)

19 على المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (١، −١، ٢) + ك (٢، ٣، −٢)

يساوي ..... وحدة طول

(أ) ٦,٣٩ (ب) ٤,١٨ (جـ) ٧,٥٦ (د) ٣,٨٩

26 بُعد المستوى المار بالنقط (٤، ٠، ٠) ، (٠، ٢، ٠) ،

20 (٠، ٠، ٢) عن نقطة الأصل = ... وحدة طول

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

بُعد النقطة أ (−٢، ٣، ١) عن المستقيم المار

21 بالنقطة ب (١، ٠، ١) وزوايا اتجاهه (٤٥°، θ°، ٤٥°)

يساوي ..... وحدة طول

(أ) ٢,١٢ (ب) ٠,٤٧١ (جـ) ١,٥ (د) ٣,٦٧

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

21 البُعد بين المستويين $س - ٢ص - ٢ع - ١٢ = ٠$ ، $-٣س + ٦ص + ٦ع - ٩ = ٠$ يساوي ..... وحدة طول

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

22 معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، −١، ١) موازيًا المستقيم المار بالنقطتين (−١، ٤، ١)، (١، ٢، ٢) هي .....

(أ) $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ١}{٢} = ع - ١$

(ب) $\vec{ر} = (٢، -١، ١) + ك (-٢، ٢، -١)$

(جـ) $س = ٢ - ٢ك$ ، $ص = -١ - ٢ك$ ، $ع = ١ + ك$

(د) $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ١}{٢} = \frac{ع - ١}{-١}$

23 معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (٢، ٥، −٣)، ب (−١، ٣، −٧) في الصورة الاتجاهية هي .....

(أ) $\vec{ر} = (٢، ٥، -٣) + ك (٣، -٢، ٤)$

(ب) $\vec{ر} = (٢، ٥، -٣) + ك (-٣، ٢، ٤)$

(جـ) $\vec{ر} = (٢، ٥، -٣) + ك (٣، ٢، ٤)$

(د) $\vec{ر} = (٢، ٥، -٣) + ك (٣، -٢، -٤)$

24 معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، ١، −٣) ويقطع من محور ع الموجب جزءًا طوله ٤ وحدات هي .....

(أ) $\vec{ر} = (٢، ١، -٣) + ك (٠، ٠، ٤)$

(ب) $\vec{ر} = (٠، ٠، ٤) + ك (٢، ١، -٣)$

(جـ) $\vec{ر} = (٠، ٠، ٤) + ك (٢، ١، -٧)$

(د) $\vec{ر} = (٢، ١، -٣) + ك ع$

25 البُعد بين المستويين $س - ٢ص - ٢ع - ١٢ = ٠$ ، $-٣س + ٦ص + ٦ع - ٩ = ٠$ يساوي ..... وحدة طول

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

26 معادلة المستوى المار بالنقطة (٣، −٢، ١) والمستقيم : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ١}{٣} = \frac{ع - ٥}{٤}$ عمودي عليه هي .....

(أ) $٢س + ٣ص + ٤ع - ٤ = ٠$

(ب) $٢س + ٣ص + ٤ع + ٤ = ٠$

(جـ) $٢س + ٣ص + ٤ع - ١٦ = ٠$

(د) $٢س + ٣ص + ٤ع + ١٦ = ٠$

27 المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطة أ (−٢، ٠، ٣) ويقطع المستوى س ص في النقطة (٢، −٢، جـ) هي .....

(أ) $س = -٢ + ٤ك$ ، $ص = -٢ك$ ، $ع = ٣ - ٣ك$

(ب) $س = ٢ - ٤ك$ ، $ص = -٢ + ك$ ، $ع = ٢ - ٣ك$

(جـ) $س = ٢ + ٤ك$ ، $ص = ٢ك$ ، $ع = -٣ + ٣ك$

(د) $س = ٤ + ٢ك$ ، $ص = ١ - ٢ك$ ، $ع = -٢ + ٣ك$

28 معادلة المستوى المار بالنقط : (٢، ٠، ٠)، (٠، ٤، ٠) ويقطع من الجزء الموجب لمحور ع جزء طوله ٥ وحدات هي .....

(أ) $\vec{ر} \cdot (١٠، ٥، ٤) = ٠$

(ب) $١٠س + ٥ص + ٤ع - ٢٠ = ٠$

(جـ) $\vec{ر} \cdot (٥، ٤، ٢٠) = ٦$

(د) $٢٠س + ص - ع - ٣ = ٠$

29 إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بواسطة المستوى $س + ٥ص - ٦ع = ٣٠$ هي أ، ب، جـ فإن أ + ب + جـ = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠ (جـ) ٣١ (د) ٤١

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

30 معادلة المستوى الذي يقطع من محاور الإحداثيات س، ص، ع الأجزاء ٢، −٣، ٥ على الترتيب هي .....

(أ) ١٥س − ١٠ص + ٦ع = −٣٠

(ب) ١٥س − ١٠ص + ٦ع = ٣٠

(جـ) −١٥س − ١٠ص + ٦ع = ٢٠

(د) −١٥س − ١٠ص + ٦ع = −٢٠

31 إذا كان المستوى يمر بالنقط (٣، −١، ٠)، (٢، ١، ٤)، (٠، ٣، ٣)

معادلة المستوى تكون .....

(أ) ١٠س + ٩ص − ٢ع = ٢١

(ب) −١٠س + ٩ص − ٢ع = −٢١

(جـ) −١٠س − ٩ص − ٢ع = −٢١

(د) ١٠س + ٩ص + ٢ع = ٢١

32 معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ٢، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية هي .....

(أ) $\vec{ر}$ = (٣، ٢، ٥) + ك (٢، ١، ٢)

(ب) $\vec{ر}$ = (٣، ٢، ٥) + ك (١، ١، ١)

(جـ) $\vec{ر}$ = (٣، ٢، ٥) + ك (٢، ٢، ١)

(د) $\vec{ر}$ = (٣، ٢، ٥) + ك (٣، ١، ٢)

33 معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، −١، ٥) ويوازي المتجه $\overrightarrow{أب}$ حيث $\overrightarrow{أب}$ = (٤، −٢، ٢) هي .....

(أ) $\vec{ر}$ = (٣، −١، ٥) + ك (٢، ١، −١)

(ب) $\frac{س-٣}{٢} = \frac{ص+١}{-١} = \frac{٥-ع}{-١}$

(جـ) $\frac{س-٣}{٤} = \frac{ص+١}{٢} = \frac{ع-٥}{٢}$

(د) $\vec{ر}$ = (٣، −١، ٥) + ك (−٤، −٢، ٢)

34 معادلة المستقيم المار (١، ٢، −٣) ويوازي محور الصادات هي .....

(أ) $\vec{ر}$ = (١، ٢، −٣) + ك (١، ٠، ٠)

(ب) $\vec{ر}$ = (١، ٢، −٣) + ك (٠، ١، ٠)

(جـ) $\vec{ر}$ = (١، ٢، −٣) + ك (٠، ٠، ١)

(د) $\vec{ر}$ = (١، ٢، −٣) + ك (١، ١، ١)

35 مستوى يحوي المستقيم س = ص = $\frac{١}{٢}$ ع ويمر بالنقطة (١، ٢، ٣) تكون معادلته هي .....

(أ) $\vec{ر}$. (١، −١، −١) = ٠

(ب) س + ٢ص + ٣ع = ٠

(جـ) س − ص + ع = ٠

(د) $\vec{ر}$. (١، ١، −١) = ٠

36 إذا كان مسقط نقطة (٤، −١، ٥) على المستوى ط هي (١، ٢، ٣)، فإن معادلة المستوى ط هي .....

(أ) ٣س − ٣ص + ٢ع = ٣

(ب) س − ص + ع = ٥

(جـ) س + ٢ص + ٣ع = ١٤

(د) ٤س − ص + ٥ع = ٤٤

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

35 معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ١، ٢)
والعمودي على المستوى ٢س − ٣ص + ع = ٥
هي .....

37
(أ) $\vec{ر} = (٣، ١، ٢) + ك (٢، -٣، ١)$
(ب) $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ص - ١}{٣} = ع - ٢$
(جـ) $\vec{ر} = (٣، ١، ٢) + ك (٢، ٣، ١)$
(د) $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ص - ١}{٣} = ع + ٢$

36 معادلة المستقيم المار بالنقطة
(١، ٢، -٤) وعمودي على كل من المستقيمين :
$\vec{ر}_١ = (٨، -٩، ١٠) + ك_١ (٣، -١٦، ٧)$،
$\vec{ر}_٢ = (١٥، -٢٩، ٥) + ك_٢ (٣، ٨، -٥)$
هي .....

38
(أ) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{-٣} = \frac{ع + ٤}{-٦}$
(ب) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع + ٤}{٦}$
(جـ) $\frac{س - ١}{-٢} = \frac{ص - ٢}{-٣} = \frac{ع + ٤}{٦}$
(د) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع + ٤}{-٦}$

39 معادلة المستوى المار بالنقطة (١، -٣، ٤)
ويوازي محور الإحداثيات س، ص هي .....
(أ) س + ص = -٢ (ب) ع = ٤
(جـ) س = ١ (د) ص = -٣

40 إذا كانت النقطة ب صورة النقطة أ (١، ٢، ٣)
بالانعكاس في المستوى س ص وكانت
جـ (٣، ٢، ٥)، فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ هي ....
(أ) $\frac{س - ٣}{٨} = \frac{ع - ٥}{٨}$ ، ص = ٢
(ب) $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ع - ٥}{٨}$ ، ص = ٢
(جـ) $\frac{س - ٣}{٨} = \frac{ع - ٥}{٨}$ ، ص = -٢
(د) $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ع - ٥}{٨}$ ، ص = -٢

41 معادلة المستقيم المار بمنتصف $\overline{أ ب}$ حيث
أ (٥، ٢، -٣)، ب (-١، ٤، ١)
و يوازي المستقيم $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ١}{٣} = \frac{ع - ٣}{٢}$
هي .....
(أ) $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص - ٣}{٣} = \frac{ع + ١}{٢}$
(ب) $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ٣}{٣} = \frac{ع + ١}{-٢}$
(جـ) $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ٣}{٣} = \frac{ع - ١}{٢}$
(د) $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص - ٣}{٣} = \frac{ع + ١}{-٢}$

42 إذا كانت معادلة الخط المستقيم ل١ هي :
$\vec{ر}_١ = (٤، ٣، ١) + ك (-٢، ١، ٣)$،
معادلة الخط المستقيم ل٢ هي :
$\vec{ر}_٢ = (٥، ١، ١) + م (٢، -١، -٣)$، فإن معادلة
المستوى الذي يحويها هي .....
(أ) س + ص + ع = ١٢
(ب) س + ٢ص + ع = ١٢
(جـ) ٢س + ص + ع = ١٢
(د) س + ص + ٢ع = ١٢

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

26

إذا كان أ (٣ ، ١ ، ٤) ، ب (١ ، ٣ ، ٠) ،
فإن معادلة المستوى العمودي على $\overline{أب}$ من
نقطة المنتصف هي .....

43 (أ) س + ص − ٢ع = ٤
(ب) س − ص − ٢ع = ٤
(جـ) س − ص + ٢ع = ٤
(د) س + ص + ٢ع = ٤

26

إذا قطع المستوى ٢س − ٣ص + ك ع = ٦٠ محاور
الإحداثيات في النقط أ ، ب ، جـ وكان حجم الهرم
44 و أ ب جـ يساوي ١٢٠٠ وحدة مكعبة فإن : ك ∈ .....
(أ) {٦} (ب) {٥}
(جـ) {٥ ، −٥} (د) {٦ ، −٦}

مستوى يمر بالنقطة ($\sqrt{٢}$ ، −١ ، ١) وكان $\vec{ن}$ هو
متجه الوحدة العمودي عليه يميل على محور
السينات بزاوية قياسها ٤٥° ويميل على محور ص
بزاوية قياسها ٦٠° ويصنع زاوية حادة مع محور ع
45 ، فإن معادلته هي .....
(أ) $\sqrt{٢}$ س + ص + ع = ٢
(ب) $\sqrt{٢}$ س − ص − ع = ٢
(جـ) $\sqrt{٣}$ $\sqrt{٢}$ س − ٤ص − ٣ع = ٧
(د) ٤ $\sqrt{٢}$ س + ٧ص + ع = ٢

26

إذا كان قياس الزاوية بين المستقيم :
$\vec{ر}$ = (٣ ، ٢ ، ٠) + ك (٢ ، −١ ، م) والمستوى
46 $\vec{ر}$ • (٣ ، ٢ ، ١) = ٣٠ تساوي ٣٠° فإن : م = ...
(أ) ٣ أو $-\frac{١}{٥}$ (ب) ٣ أو $\frac{١}{٥}$
(جـ) −٣ أو $\frac{١}{٥}$ (د) −٣ أو $-\frac{١}{٥}$

26

إذا كان قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم
$\frac{١}{٢}$ س = − ص = $\frac{١}{٣}$ ع
47 والمستوى ٣س + ٢ص + ك ع = ٩
هو ٣٠° فإن قيمة ك يمكن أن تكون .....
(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

26

إذا كان المستقيم $\vec{ر}$ = (−٥ ، ٠ ، −٤) + ك $\vec{هـ}$
يقطع المستوى ٣س + ٢ص + ع + ٥ = صفر
48 في النقطة (−١ ، −٢ ، ٢) ، فإن قياس الزاوية بين
المستقيم والمستوى = ...
(أ) ٦٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٣٠° (د) ٩٠°

26

جيب الزاوية التي يصنعها المستوى
٤س + ٣ص + ١٢ع = ١٥ مع الاتجاه الموجب
49 لمحور السينات يساوي .....
(أ) $\frac{٣}{١٣}$ (ب) $\frac{٤}{١٣}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}\,١٧}{١٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٤}\,١٠}{١٣}$

إذا كان بعد النقطة (١ ، ١ ، ١) عن نقطة الأصل
يساوي نصف بعدها عن المستوى
50 س + ص + ع + ك = صفر ك ∈ .....
(أ) {−٣ ، ٣} (ب) {−٣ ، ٩}
(جـ) {−٩ ، ٣} (د) {−٩ ، ٩}

قياس الزاوية التي يصنعها خط تقاطع
المستويين : س + ص + ع = ١ ، س + ع = ٠ مع
51 محور ع تساوي .....
(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٢٠°

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ثانيًا : أهم الأسئلة المقالية

52 أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى : $2س + ص - 4ع = 0$ والواقع على بعد $\sqrt{21}$ وحدة طول من النقطة $(1، 2، 0)$

53 إذا قطع المستوى $3س + 2ص + 4ع = 12$ محاور الإحداثيات $س، ص، ع$ في النقط $أ، ب، جـ$ على الترتيب احسب مساحة المثلث $أ ب جـ$

54 أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $(2، 1، 4)$ ويحقق الشرط التالي : عمودي على المستقيم المار بالنقطتين $(3، 2، 5)$، $(1، 6، 4)$

55 أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $(2، 1، 4)$ ويحقق الشرط التالي : عمودي على كل من المستويين $7س + ص + 2ع = 6$ ، $3س + 5ص - 6ع = 8$

56 أثبت أن المستويين $س + 3ص - 4ع = 3$ ، $2س + 6ص - 8ع = 4$ متوازيان ، و أوجد البعد بينهما

57 أثبت أن المستقيمين
$ك_1 = (1، 2، 4) + ل_1 (2، -1، 1)$،
$ك_2 = (1، 1، 1) + ل_2 (-2، 7، 11)$ متعامدان ثم بين أن المستقيمين متخالفان

58 أوجد قيمة $ب$ التي تجعل المستقيمين
$ل_1 : ك_1 = (3، -1، ب) + ل_1 (4، 1، 3)$
$ل_2 : \frac{س}{-1} = \frac{ص - 4}{2} = \frac{ع + 1}{2}$ متقاطعان في نقطة ، وأوجد نقطة تقاطعهما

59 أثبت أن المستقيمين :
$ك_1 = (3س_1 + ص_1 - ع_1) + ل_1 (س_1 + 2ص_1 + 3ع_1)$،
$ك_2 = (2س_2 + 5ص_2) + ل_2 (س_2 - ص_2 + ع_2)$
متقاطعان ، و أوجد معادلة المستوى الذي يحتويهما

60 أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويقطع المستقيم
$ك = (3، 1، 4) + ل (2، 1، 3)$ على التعامد

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ثانيًا : ملخص الصور المختلفة للعدد المركب :

(١) ملخص الأعداد التخيلية

يرمز له بالرمز ت حيث : ت = $\sqrt{-1}$ ، $ت^{٢}$ = −١ ، $ت^{٣}$ = −ت ، $ت^{٤}$ = ١

الأعداد التخيلية تتكرر كل أربع مرات ويكون :

- $ت^{٤ن}$ = ١
- $ت^{٤ن+١}$ = ت
- $ت^{٤ن+٢}$ = $ت^{٢}$
- $ت^{٤ن+٣}$ = $ت^{٣}$

($ت^{ن}$ = ± ١ أو ± ت ملهاش احتمالات تانية)

(٢) الأعداد المركبة

- **العدد المركب :** هو العدد الذي يمكن كتابته على الصورة : س + ت ص حيث : س ، ص ∈ ح ، $ت^{٢}$ = −١ ويسمى س بالجزء الحقيقي للعدد المركب ، ص بالجزء التخيلي له وتعرف الصورة (س + ص ت) بالصورة الجبرية للعدد المركب .

- **مجموعة الأعداد المركبة ك :**

ك = { س + ت ص : س ∈ ح ، ص ∈ ح ، $ت^{٢}$ = −١ } **لاحظ :** ح ⊂ ك

لاحظ :

(أ) إذا كان : س = ٠ ، ص ≠ ٠ فإن العدد المركب يصبح : ع = ت ص ويسمى عدد تخيلي صِرف (بحـــت)

(ب) إذا كان : ص = ٠ ، س ≠ ٠ فإن العدد المركب يصبح : ع = س ويسمى عدد حقيقي صِرف (بحـــت)

- **تساوي عددين مركبين :**

يتساوى العددان المركبان إذا وفقط تساوى الجزءان الحقيقيان وتساوى الجزءان التخيليان فيهما . **أي أن : لأي عددين مركبين :** ع١ = س١ + ص١ ت ، ع٢ = س٢ + ت ص٢ فإن : ع١ = ع٢ ، س١ = س٢ ، ص١ = ص٢ والعكس صحيح .

WWW.JAWACADEMY.NET | WWW.MRAHMEDESSAM.COM | ENG/AHMED ESSAM ELDIN | ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

• جمع وطرح عددين مركبين :

لأي عددين مركبين : ع١ = س١ + ص١ ت ، ع٢ = س٢ + ص٢ ت يكون :

ع١ ± ع٢ = (س١ ± س٢) + (ص١ ± ص٢) ت

[نجمع حقيقي مع حقيقي وتخيلي مع تخيلي]

• ضرب عددين مركبين ⟵ ضرب أقواس عادي .....

فمثلا :

• ٢ت (١ – ٣ت) = ٢ت – ٦ت٢ = ٦ + ٢ت

• (٣ – ت) (٢ + ٥ت) = ٦ + ١٥ت – ٢ت – ٥ت٢ = ٦ + ١٣ت + ٥ = ١١ + ١٣ت

• (٤ – ت)٢ = ١٦ – ٨ت + ت٢ = ١٥ – ٨ت

لاحظ : (س + ص ت)ن = أ + ب ت (حيث ن ∈ ص+) ← نظرية ديموافر

• مرافق العدد المركب :

• إذا كان : ع = س + ص ت فإن : مرافق العدد ع يرمز له بالرمز : ع̄

حيث : ع̄ = س – ص ت [نغير إشارة الجزء التخيلي]

• خواص المرافق :

(أ) ع + ع̄ = (س + ص ت) + (س – ص ت) = ٢س ∈ ح [ضعف الجزء الحقيقي]

• ع – ع̄ = ٢ص ت [ضعف الجزء التخيلي]

(ب) ع ع̄ = س٢ + ص٢ ∈ ح [ع ع̄ = الحقيقي٢ + التخيلي٢] (ع ع̄ ∈ ح+)

(جـ) (ع١ ± ع٢) = ع١ ± ع٢ [المرافق يوزع جمع وطرح]

(د) (ع١ × ع٢) = ع١ × ع٢ ، $\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right) = \frac{ع_1}{ع_2}$ [المرافق يوزع كذلك ضرب وقسمة]

(هـ) إذا كان ع عددًا حقيقيًا فإن : ع̄ = ع فمثلاً : إذا كان ع = ٥ فإن : ع̄ = ٥

(و) يمكن أخذ مرافق الطرفين دون أن يغير الناتج (ع̄)ن = (ع ن)̄

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

• قسمة عددين مركبين :

$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ع_1}{ع_2} \times \frac{\overline{ع_2}}{\overline{ع_2}}$ حيث : $ع_2 \neq 0$ [ابقى اضرب المقام الأول أحسن]

فمثلا : $\frac{30 + 45ت}{1 - 2ت} = \frac{30 + 45ت}{1 - 2ت} \times \frac{1 + 2ت}{1 + 2ت} = \frac{-60 + 105ت}{5} = -12 + 21ت$

لاحظ : $\frac{1}{ت} = \frac{1}{ت} \times \frac{-ت}{-ت} = -1ت$

[ت تطلع فوق ب – ت] ⟵ [$\frac{1}{ت} = -1ت$ مباشرة بدون الضرب في المرافق]

• المعكوس الجمعي للعدد المركب والضربي :

$-ع$ ، $\frac{1}{ع}$ هما المعكوس الجمعي والضربي للعدد المركب على الترتيب

• مستوى أرجاند :

- استخدم العالم أرجاند المستوى الإحداثي المتعامد في تمثيل العدد المركب على الصورة $س + ت ص$ يجعل المحور الأفقي $س س'$ يمثل الجزء الحقيقي والمحور $ص ص'$ يمثل الجزء التخيلي ولذلك عُرِفَ الشكل الذي تمثل فيه الأعداد المركبة بيانيًا بمستوى أرجاند .

أي أن : العدد المركب : ع = $س + ص ت$ يمثل على مستوى أرجاند بالنقطة (س ، ص)

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظات على مستوى أرجاند :

(١) إذا كان ع عدد حقيقي صرف فإنه يمثل على أرجاند على محور س

• حقيقي موجب ∈ و س • حقيقي سالب ∈ و س

(٢) إذا كان ع عدد تخيلي صرف فإنه يمثل على أرجاند على محور ص

• تخيلي موجب ∈ و ص • تخيلي سالب ∈ و ص

(٣) النقطتان اللتان تمثلان العدد المركب ومعكوسه الجمعي على شكل أرجاند تكونان متماثلتين بالنسبة لنقطة الأصل

[**أي :** هما طرفا قطعة مستقيمة تكون نقطة الأصل في منتصفها]

(٤) العددين المركبان المترافقان

يمثلان في شكل أرجاند بنقطتين متماثلتين بالنسبة لمحور السينات س س

(٥) (− ع) هو صورة ع بالانعكاس في (و) أ، صورة ع بالانعكاس في محور ص

مقياس العدد المركب :

• إذا كان : ع = س + ص ت فإن مقياس العدد ع يرمز له بالرمز | ع | أو ل

• مقياس العدد ع : هو بُعد النقطة التي تمثل العدد ع عن نقطة الأصل (و)

• | ع | = √(س² + ص²) = √(الحقيقي² + التخيلي²)

• خواص المقياس :

• | ع | ≥ ٠ [| ع | = ٠ عندما ع = ٠]

• | ع | = | ع̄ | = | −ع | = | −ع̄ |

• ع ع̄ = | ع |² = | ع̄ |²

WWW.JAWACADEMY.NET WWW.MRAHMEDESSAM.COM ENG/AHMED ESSAM ELDIN ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

- $\left|\frac{ع_1}{ع_2}\right| = \frac{|ع_1|}{|ع_2|}$ (المقياس يوزع قسمة)

، $|ع_1 ع_2| = |ع_1||ع_2|$ (المقياس يوزع ضرب)

- $|ع|^ن = |ع^ن|$ [نظرية ديموافر بأس صحيح موجب]

- $\left|\frac{1}{ع}\right| = \frac{1}{|ع|}$

- $|ع_1 + ع_2| \neq |ع_1| + |ع_2|$

لاحظ: • $|ع_1 + ع_2| = |ع_1| + |ع_2|$ ، إذا كان $ع_1$ ، $ع_2$ لهما نفس السعة

• $|ع_1 + ع_2|$ نحصل عليه من قانون محصلة قوتين

$$|ع_1 + ع_2| = \sqrt{|ع_1|^2 + |ع_2|^2 + 2|ع_1||ع_2| \text{ جتا } \theta}$$

حيث θ الزاوية بين $ع_1$ ، $ع_2$

- إذا كان $ع = \frac{س + ص ت}{س - ص ت}$ فإن : $|ع| = 1$ [حيث أن البسط مرافق المقام]

فمثلاً: $\left|\frac{\sqrt{م^2 + 2} - 4ت}{\sqrt{م^2 + 2} + 4ت}\right| = 1$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

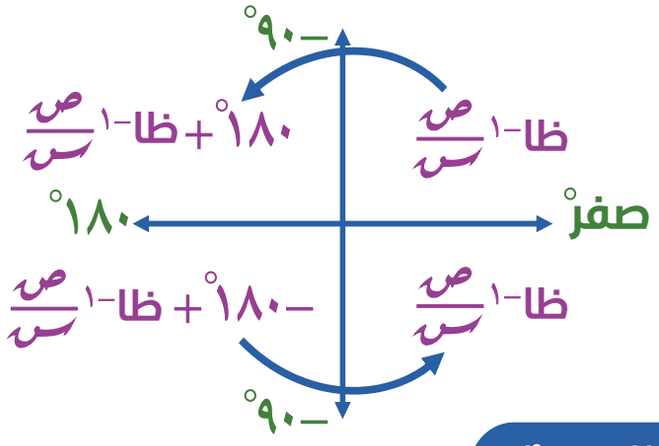
سعة العدد المركب :

- إذا كان : ع = س + ص ت فإن سعة (ع) يُرمز لها بالرمز θ
- سعة (ع) : هي الزاوية المحصورة بين الاتجاه الموجب لمحور س ، $\overrightarrow{وع}$
- **أي عدد مركب له :** عدد لا نهائي من السعة (جميعها زوايا متكافئة)

ولكن له سعة أساسية وحيدة حيث : السعة الأساسية $\in]-\pi ، \pi]$

- حساب السعة الأساسية :

نحدد الربع من إشارتي س ، ص (أو المحور) ثم نستخدم الشكل :



ملاحظات على السعة :

(١) وانت شغال خد بالك من الاتجاه :

- عكس عقارب الساعة ← زاوية موجبة .
- مع عقارب الساعة ← زاوية سالبة .

(٢) سعة العدد المركب تأخذ عدد غير منتهي من القيم وذلك بإضافة 2π

أو مضاعفاتها = $\theta + 2\pi$ ن (حيث ن $\in$ ص)

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK

خواص السعة :

- سعة ($\overline{ع}$) = − سعة (ع)
- سعة $\frac{1}{ع}$ = − سعة (ع)
- سعة ($ع^{ن}$) = ن × سعة (ع) حيث ن ∈ ص [نظرية ديموافر بأس صحيح]
- سعة ($ع_1 ع_2$) = سعة $ع_1$ + سعة $ع_2$
- سعة ($\frac{ع_1}{ع_2}$) = سعة $ع_1$ − سعة $ع_2$
- سعة (أ ع) = سعة ع ، (أ > ٠) أو ($-\pi$ + سعة ع ، أ < ٠)

[سعة − ع = $-\pi$ + سعة ع ، سعة (١٠ ع) = سعة ع]

- سعة ($ع_1 + ع_2$) ≠ سعة $ع_1$ + سعة $ع_2$ وإنما نحصل عليها من محصلة قوتين هندسيًا

لاحظ : إذا كان ع عدد مركب سعته θ فإن العدد (ت ع) هو صورة العدد (ع)

بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها 90° " عكس عقارب الساعة "

وبالتالي : • | ت ع | = | ت | × | ع | = | ع | ،

سعة (ت ع) = سعة ت + سعة ع = $90^\circ + \theta$

- جميع الأعداد الحقيقية صرف الموجبة مختلفة في المقياس ولكن لها نفس السعة صفر وجميع الأعداد الحقيقية صرف السالبة مختلفة في المقياس ولكن لها نفس السعة π وجميع الأعداد التخيلية صرف الموجبة مختلفة في المقياس ولكن لها نفس السعة $\frac{\pi}{2}$ وجميع الأعداد التخيلية صرف السالبة مختلفة في المقياس ولكن لها نفس السعة $-\frac{\pi}{2}$

إذا كان : سعة ع = $\frac{\pi}{4}$ فإن : س = ص ، س > ٠ ، ص > ٠

- سعة ع = $-\frac{3\pi}{4}$ فإن : س = ص ، س < ٠ ، ص < ٠
- سعة ع = $-\frac{\pi}{4}$ فإن : ص = −س ، س > ٠ ، ص < ٠
- سعة ع = $\frac{3\pi}{4}$ فإن : ص = −س ، س < ٠ ، ص > ٠

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(٣) الصورة المثلثية (القطبية)

• إذا كان : ع = س + ص ت بالصورة الجبرية فإن الصورة المثلثية (القطبية)

للعدد ع هي ع = | ع | (جتا θ + ت جا θ)

حيث : θ تمثل سعة ع أو سعته الأساسية متفرقش وكذلك θ ويمكن أن تكون بالتقدير الستيني أو الدائري متفرقش

(٤) الصورة المثلثية القياسية

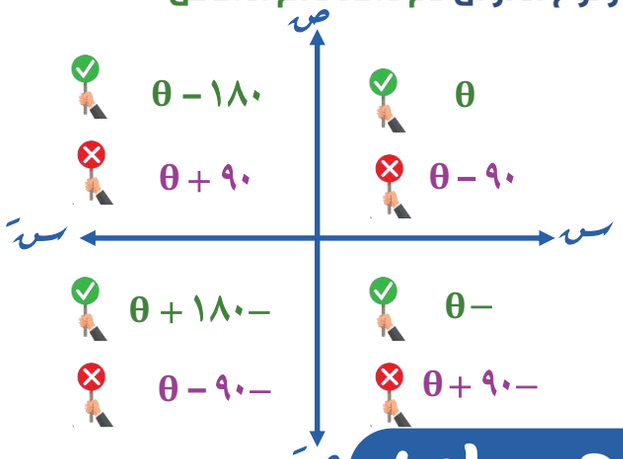
• ع = + | ع | (+ جتا θ + ت جا θ)

شرطان : كل إشارات المعاملات موجبة ، الدوال مظبوطة

(الـ جتا في الجزء الحقيقي والـ جا في الجزء التخيلي) ،

إذا اختل أحد الشرطان أو كلاهما :

لابد من وضعها على الصورة القياسية لأنها الصورة الوحيدة التي يمكن منها استنتاج مقياس وسعة العدد وكذلك إجراء عمليات عليه ، ولتحويلها إلى الصورة القياسية نحدد الربع ونوع الدوال ثم نستخدم الشكل :



لاحظ : حفظ (هـــام) :

إذا كان : ع = ١ + جتا × + جا × ⟸ العدد مودي

فإن : | ع | = ٢ جتا $\frac{\times}{٢}$ ، سعة ع = $\frac{\times}{٢}$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(٥) الصورة الأسية (صورة أويلر) :

إذا كان : ع = س + ص ت بالصورة الجبرية فإن : الصورة الأسية للعدد ع هي :

ع = | ع | هـ$^{\theta ت}$ ، حيث : θ تمثل سعة العدد ع أو سعته الأساسية متفرقش

ولكن θ لابد أن تكون بالتقدير الدائري وماينفعش تكون بالستيني .

علاقات هامة :

(١) هـ$^{\theta ت}$ + هـ$^{-\theta ت}$ = ٢ جتا θ

(٢) هـ$^{\theta ت}$ − هـ$^{-\theta ت}$ = ٢ت جا θ

لاحظ :

التحويل من الصورة الأسية للجبرية : نحول للمثلثية ثم نفك

ثالثًا : ملخص نظرية ديموافر :

لاحظ : إحنا عندنا ديموافر ليها شكلين :

(أ) $ع^{ن} = |ع|^{ن} (جتا\ ن\theta + ت\ جا\ ن\theta)$ ← إذا كان $ن \in ص$

(ب) $ع^{\frac{1}{ن}} = |ع|^{\frac{1}{ن}} جتا \frac{\theta + ٣٦٠ر}{ن} + ت\ جا \frac{\theta + ٣٦٠ر}{ن}$

- حيث : $ر = ٠، ١، ٢، ..... ، ن - ١ ، ن \in ص$ [نظرية ديموافر بأس نسبي]

كلامنا هنا عن رقم (ب)

(١) نظرية ديموافر بأس نسبي

- إذا كان : $ع^{ن} = |ع|^{ن} (جتا\ ن\theta + ت\ جا\ ن\theta)$

فإن : $ع^{\frac{1}{ن}} = |ع|^{\frac{1}{ن}} (جتا \frac{\theta^\circ + ٣٦٠ر^\circ}{ن} + ت\ جا \frac{\theta^\circ + ٣٦٠ر^\circ}{ن})$

$= |ع|^{\frac{1}{ن}} هـ^{ت \frac{\theta^ء + ٢\pi ر}{ن}}$ ، حيث : $ر = ٠، ١، ٢، ٣، ..... ، ن - ١$

- $ع^{\frac{1}{ن}}$ تسمى الجذور النونية للعدد ع وعددها ن جذر [$ع^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{ع}$]

فمثلاً

(١) $ع^{\frac{1}{٢}} = \sqrt{ع}$ تمثل الجذور التربيعية للعدد ع وعددهم جذران

(٢) الجذور التكعيبية لـ ع = $ع^{\frac{1}{٣}} = \sqrt[٣]{ع}$ وعددهم ٣ جذور

(٣) $ع^{\frac{٣}{٢}} = (ع^{٣})^{\frac{1}{٢}}$ هما الجذران التربيعيان للعدد $ع^{٣}$ وعددهم جذران

(٤) $ع^{\frac{٥}{٦}} = \sqrt[٦]{ع^{٥}}$ ← الجذور السداسية للعدد $ع^{٥}$ عددهم ٦ جذور

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(٢) خواص الجذور (إيجاد الجذور):

إذا كان : ع = س + ص ت = | ع | (جتا θ + ت جا θ)

فإن : ع$^{\frac{١}{ن}}$ يكون لها ن جذر بحيث :

أولاً : الجذور لها نفس المقياس

• | ع١ | = | ع٢ | = | ع٣ | = ...

[جميع الجذور لها نفس المقياس وتساوي (مقياس العدد الأصلي)$^{\frac{١}{ن}}$]

ثانيًا : سعة الجذور مختلفة

• سعة ع١ = $\frac{\text{سعة ع}}{ن}$ • سعة ع٢ = سعة ع١ + $\frac{٣٦٠}{ن}$

• سعة ع٣ : سعة ع٢ + $\frac{٣٦٠}{ن}$ وهكذا ..... ∴ سعة الجذر الأول = $\frac{\text{سعة الأصلي}}{ن}$

، سعة أي جذر آخر = سعة اللي قبله + $\frac{٣٦٠}{ن}$

أو سعة أي جذر = سعة الأول + ر × $\frac{٣٦٠}{ن}$

• حيث : $\frac{٣٦٠}{ن}$ = ق (عر ، عر+١)

• مجموع الجذور النونية للعدد المركب يساوي صفر، فمثلا : مجموع الجذور التربيعية للعدد ع يساوي صفر ومجموع الجذور التكعيبية للعدد ع يساوي صفر وهكذا .....

• ع١^{ن} = ع٢^{ن} = ع٣^{ن} = ع٤^{ن} = ... = ع

• حاصل ضرب الجذور النونية للعدد المركب = ع ، ن فردي ؛ −ع ، ن زوجي

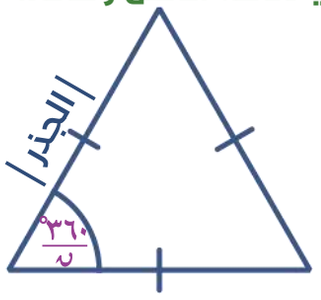
WWW.JAWACADEMY.NET WWW.MRAHMEDESSAM.COM ENG/AHMED ESSAM ELDIN ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(٣) تمثيل الجذور على مستوى أرجاند

(أ) عند تمثيل الجذور على مستوى أرجاند وتوصيلها ببعض فإن هذه الجذور تكون رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه "ن"

فمثلاً

- عند توصيل الجذور التكعيبية لعدد مركب على مستوى أرجاند يكون الشكل الناتج مثلث متساوي الأضلاع يتكون من ٣ مثلثات متطابقة ونقطة تلاقي متوسطاته هي نقطة الأصل .
- عند توصيل الجذور السداسية لعدد مركب على مستوى أرجاند يكون الشكل الناتج سداسي (مسدس) منتظم يتكون من ٦ مثلثات متطابقة ومركزه الهندسي وهو نقطة الأصل .
- عند توصيل الجذور الرباعية لعدد مركب على مستوى أرجاند يكون الشكل الناتج مربعًا يتكون من ٤ مثلثات متطابقة ونقطة تلاقي قطرينه هي نقطة الأصل وهكذا ...



(ب) مساحة المضلع الذي رؤوسه الجذور النونية للعدد المركب

$= ن \times$ مساحة المثلث الواحد $= \frac{1}{2} ن | \text{الجذر} |^2 \text{ جا } \frac{360°}{ن}$

(ب) الدائرة المارة برؤوس الجذور تكون دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوي مقياس أي جذر وتكون معادلتها : $س^2 + ص^2 = | \text{أي جذر} |^2$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(٤) ملاحظات على ديموافر

(أ) الجذران التربيعيان لأي عدد مركب يكون كل منهما معكوس جمعي للآخر يعني

لو كان الأول (٣ – ت) التاني هيكون (–٣ + ت)

(ب) وانت بتجيب جذور تربيعية لو كان العدد اللي بنجيب جذوره :

- سعته مشهورة : اشتغل ديموافر
- سعته مش مشهورة : اشتغل جبريًا

وذلك بفرض : $\sqrt{ع} = ا + ب ت$ حيث : ا ، ب ∈ ح وحل المعادلة لتحصل على قيم ا ، ب

ومنها تحصل على الجذور أو طبق القاعدة دي مباشرةً :

$$\sqrt{ع} = \pm (\sqrt{\frac{|ع| + س}{٢}} \pm \sqrt{\frac{|ع| - س}{٢}} \ ت)$$

حسب إشارة التخيلي

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

رابعًا : ملخص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

(١) الاستنتاج

- إذا كان : $ع^{٣} = ١$ فإن : $ع = \sqrt[٣]{١}$ ، $ع = ١$ أو $ω$ أو $ω^{٢}$
- $ω$ أو $ω^{٢} = \frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت أو $\frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت
- $ω$ أو $ω^{٢}$ = جتا -١٢٠° + ت جا -١٢٠° ، جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°

(٢) خواص العدد ω

(أ) $١ + ω + ω^{٢} = ٠$ ⇜ $(١ + ω)^{٢} = ω$

- $١ + ω = -ω^{٢}$ ⇜ $(١ + ω)^{٢} = -ω$
- $١ + ω^{٢} = -ω$ ⇜ $(١ + ω^{٢})^{٢} = -ω^{٢}$
- $ω + ω^{٢} = -١$ ⇜ $(ω + ω^{٢})^{٢} = -١$

(ب) $\frac{١}{ω} = ω^{٢}$ ، $\frac{١}{ω^{٢}} = ω$

(جـ) $ω - ω^{٢} = ω - ω^{٢} = \pm\sqrt{٣}$ ت $= ١ + ٢ω = ١ + ω^{٢}$

(د) $\overline{ω} = ω^{٢}$ ، $\overline{ω^{٢}} = ω$

- $\overline{(٢ω + ٣ω^{٢})} = ٣ω^{٢} + ٢ω$

(هـ) $ω$ تتكرر كل ٣ مرات : $ω^{٣ن} = ١$ ، $ω^{٣ن+١} = ω$ ، $ω^{٣ن+٢} = ω^{٢}$

(و) • $|ω| = |ω^{٢}| = ١$ ، • سعة $ω$ = سعة $ω^{٢} = \pm ١٢٠^{\circ}$

(ز) مجموعة حل المعادلة : $س^{٢} + س + ١ = ٠$ في ك أو $س + \frac{١}{س} = -١$ هي $\{ω ، ω^{٢}\}$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK

ملاحظات

إذا كانت $س \in ك$ فإن :

(أ) إذا كان : $س^{٣} = ٨$ فإن : $س = ٢$ أو $٢ ω$ أو $٢ ω^{٢}$

، إذا كان : $س^{٣} = ٢٧$ فإن : $س = ٣$ أو $٣ ω$ أو $٣ ω^{٢}$

تعميم : $س = \sqrt[٣]{أ} \leftarrow ر = أ ، أ ω ، أ ω^{٢}$

مثلًا : $س = \sqrt[٣]{٨ ت^{٣}} = ٢ ت ، ٢ ت ω ، ٢ ت ω^{٢}$

(ب) $(أ + ب ω)(أ + ب ω^{٢}) = أ^{٢} + أ ب ω^{٢} + أ ب ω + ب^{٢} ω^{٣} = أ^{٢} + ب^{٢} - أ ب$

(مربع الأول + مربع الثاني – حاصل ضربهما)

(جـ) معادلة الدائرة المارة برؤوس المثلث الذي رؤوسه الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي : $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ (دائرة وحدة)

(ى) مساحة المثلث الذي رؤوسه الجذور التكعيبية للواحد الصحيح $= \frac{\sqrt{٣} ٣}{٤}$ وحدة مربعة

لاحظ : وانت بتحل على اوميجا ← إما بالخواص
عوض عن $ω$ كعدد مركب واشتغل

(هـ) أي معادلة تربيعية لو ليها جذرين مركبين مترافقين بتكون معاملات حدودها حقيقية

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الوحدة الثانية جبر

أولًا : أهم أسئلة الاختيار من متعدد

25

1) إذا كان $ت^{٢} = -١$ و كان $ع = ت$، فإن معكوسه الضربي يمثل في شكل أرجاند بالنقطة .....

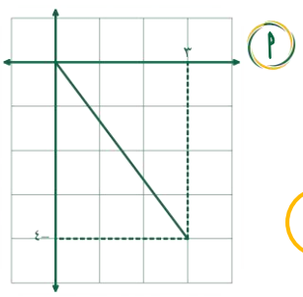
(أ) $(٠، ١)$ (ب) $(-١، ٠)$

(جـ) $(١، ٠)$ (د) $(٠، -١)$

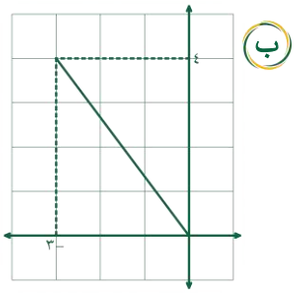
25

2) إذا كان $ت^{٢} = -١$ وكان $ع = ٣ + ٤ت$ فأي من الأشكال الآتية تمثل $(-\overline{ع})$ ؟

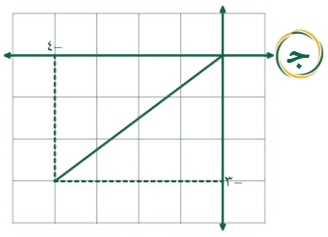
(أ)



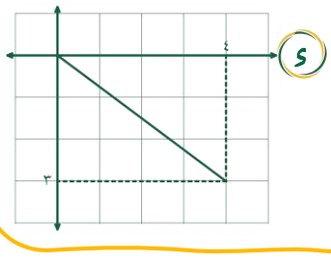
(ب)



(جـ)



(د)



25

3) إذا كان $ت^{٢} = -١$ وكان : $ع_{١} = -٢ + ٢\sqrt{٣}ت$،

$ع_{٢} = ٢(جا ٦٠° + ت جتا ٦٠°)$،

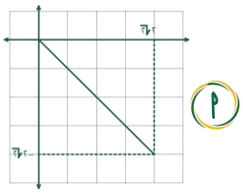
فإن سعة العدد $(\frac{ع_{٢}}{ع_{١}})$ = ...

(أ) $\frac{٥\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{-\pi}{٣}$ (د) $\frac{-\pi}{٢}$

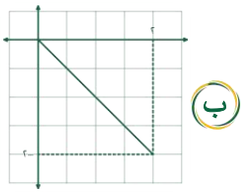
25

4) إذا كان $ت^{٢} = -١$ فأي الأشكال التالية هو التمثيل البياني للعدد المركب $ع = \sqrt{٢}(جتا \frac{-\pi}{٤} + ت\ جا \frac{-\pi}{٤})$ ؟

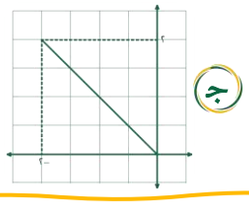
(أ)



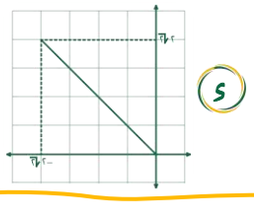
(ب)



(جـ)



(د)



25

5) إذا كان $١ ، ω ، ω^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن قيمة المقدار الآتي في أبسط صورة : $\left(\frac{٢ + ٥ω}{٥ + ٢ω^{٢}} + \frac{٧ω^{٢} - ٤}{٧ - ٤ω}\right)^{١٥}$ تساوي .....

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) $ω$ (د) $ω^{٢}$

26

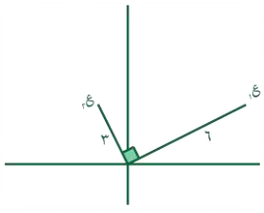
6) إذا كان $ت^{٢} = -١$ فإن السعة الأساسية للعدد $هـ^{\frac{٤}{٣}\pi ت}$ تساوي .....

(أ) $-\frac{٢}{٣}\pi$ (ب) $\frac{٢}{٣}\pi$ (جـ) $\frac{١}{٣}\pi$ (د) $-\frac{١}{٣}\pi$

25

7) إذا كان $ت^{٢} = -١$ وكان الشكل المقابل يمثل العددين المركبين $ع_{١}، ع_{٢}$ على مستوى أرجاند و كان $|ع_{١}| = ٦ ، |ع_{٢}| = ٣$

فإن $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ = ...



(أ) $٢ت$ (ب) $-٢ت$ (جـ) $\frac{١}{٢}ت$ (د) $-\frac{١}{٢}ت$

25

8) إذا كان $ت^{٢} = -١$ وكان $١ ، ω ، ω^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن قيمة المقدار :

$٤ + ٥(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت)^{٢٠١٥} + (\frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت)^{١٠٠٧}$ تساوي .....

(أ) $ω^{٢} - ٣ω$ (ب) $٢ω^{٢} - ٣ω$

(جـ) $ω^{٢} - ω$ (د) $٣ω^{٢} - ٢ω$

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

9 إذا كان ١ ، ω ، ω٢ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن : أبسط صورة للمقدار التالي :
(١ − ω٢ + ω٤)٢ + (١ + ω٢ + ω٤)٢ تساوي .....
(أ) ٤ω٢ (ب) ٤ω (جـ) ٤ (د) −٤

10 إذا كان ١ ، ω ، ω٢ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن المقدار : (ω + $\frac{١}{ω}$)٢ + (ω٢ + $\frac{١}{ω^{٢}}$)٢ + (ω٣ + $\frac{١}{ω^{٣}}$)٢ + (ω٤ + $\frac{١}{ω^{٤}}$)٢ + (ω٥ + $\frac{١}{ω^{٥}}$)٢ + (ω٦ + $\frac{١}{ω^{٦}}$)٢ يساوي .....
(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

11 إذا كانت ت٢ = −١ وكان : س = $\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ فإن قيمة س١٠٠ + س١٠١ = ...
(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ω (د) ω٢

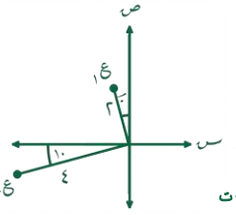
12 في الشكل المقابل :
إذا كان العدد
المركب ع = − $\sqrt{٢}$٣ − ٢ت
يمثل على مستوى أرجاند
كما بالشكل المقابل فإن قيمة θ = ...°
(علما بأن : ت٢ = −١)
(أ) ١٥٠ (ب) ٢١٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٢٠

13 إذا كان ١ ، ω ، ω٢ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، ت٢ = −١ وكان : | −٣ ك ω | = | ١٢ ت | ، فإن : ك = ...
(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ± ٤ (د) ± ٩

14 إذا كان ١ ، ω ، ω٢ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، ت٢ = −١ وكان :
ع = ω + $\frac{ω}{ت}$ + ω٥ − $\frac{ت}{ω}$
فإن : الصورة المثلثية للعدد ع هي .....
(أ) ٢ (جتا $\frac{٣π}{٤}$ + ت جا $\frac{٣π}{٤}$)
(ب) $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣π}{٤}$ + ت جا $\frac{٣π}{٤}$)
(جـ) $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{π}{٤}$ + ت جا $\frac{π}{٤}$)
(د) ٢ (جتا $\frac{π}{٤}$ + ت جا $\frac{π}{٤}$)

15 إذا كان ت٢ = −١ ، وكان ع١ ، ع٢ جذرين تربيعيين لعدد مركب حيث : ع١ = ١ − $\sqrt{٣}$ ت ، فإن : ع٢ = ...
(أ) هـ $^{\frac{π٢}{٣}ت}$ (ب) ٢ هـ $^{\frac{π٢}{٣}}$
(جـ) هـ $^{-\frac{π٢}{٣}}$ (د) ٢ هـ $^{-\frac{π٢}{٣}ت}$

16 في الشكل المقابل :
الصورة الأسية للعدد $\frac{ع١}{ع٢}$
هي ..... (علمًا بأن ت٢ = −١)



(أ) $\frac{١}{٢}$ هـ $^{\frac{π}{٣}ت}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ هـ $^{\frac{π}{٢}ت}$
(جـ) $\frac{١}{٢}$ هـ $^{\frac{π}{٦}ت}$ (د) $\frac{١}{٢}$ هـ $^{\frac{π}{٤}ت}$

17 المعادلة التربيعية التي جذراها :
(١ + ω − ω٢)٣ ، (١ − ω + ω٢)٣ هي .....
(علمًا بأن ١ ، ω ، ω٢ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح)
(أ) س٢ + ١٦س + ٦٤ = ٠
(ب) س٢ − ١٦س + ٦٤ = ٠
(جـ) س٢ + ٨س + ١٦ = ٠
(د) س٢ − ٨س + ١٦ = ٠

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

18 إذا كان $ت^{٢} = -١$ فإن المعادلة التربيعية التي جذراها : $ل = ٢ هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$ ، $م = ٢ هـ^{-\frac{\pi}{٦} ت}$

(أ) $س^{٢} - ٢\sqrt{٣}\, س - ٤ = ٠$

(ب) $س^{٢} - ٢\sqrt{٣}\, س + ٤ = ٠$

(جـ) $س^{٢} + ٢\sqrt{٣}\, س - ٤ = ٠$

(د) $س^{٢} + ٢\sqrt{٣}\, س + ٤ = ٠$

19 الجذرين التربيعيين للعدد $-٢٤ ت$ هما ..... (علمًا بأن $ت^{٢} = -١$)

(أ) $\pm ٤ ت٣$ (ب) $\pm ٤ - ت٣$

(جـ) $-٤ + ت٣ ، ٤ - ت٣$ (د) $-٤ - ت٣ ، ٤ + ت٣$

20 إذا كانت ($ت^{٢} = -١$) وكان $ع = \frac{١ + \sqrt{٣}\, ت}{\sqrt{٣} + ت}$

فإن الصورة الأسية للعدد $(\overline{ع})^{١٠٠}$ هي .....

(أ) $هـ^{-\frac{٢\pi}{٣} ت}$ (ب) $٢ هـ^{\frac{٢\pi}{٣} ت}$

(جـ) $هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}$ (د) $٢ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$

21 إذا كان $ع_{١} ، ع_{٢}$ عددان مركبان ،

سعة $(ع_{١} ع_{٢}) = \frac{\pi ٧}{١٨}$ ، سعة $(\frac{ع_{٢}}{ع_{١}}) = \frac{\pi}{٦}$

فإن سعة $ع_{٢}$ = ...

(أ) $\frac{\pi ٥}{١٨}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) $\frac{\pi ٧}{٩}$

22 إذا كان $ت^{٢} = -١$ وكان $هـ^{\theta ت} = جتا\theta + ت\, جا\theta$ ،

فإن $هـ^{أ ت} \cdot هـ^{ب ت} \cdot هـ^{جـ ت}$ = ... حيث أ ، ب ، جـ قياسات زوايا مثلث بالقياس الراديان

(أ) $-ت$ (ب) -١ (جـ) ١ (د) $ت$

23 إذا كان $ع_{١} = جتا\theta + ت\, جا\theta$ ، $ع_{٢} = جتا\theta - ت\, جا\theta$ ،

فإن السعة الأساسية للعدد $\frac{ع_{١}^{٢}}{ع_{٢}^{٣}}$ تساوي .....

(علمًا بأن $ت^{٢} = -١$)

(أ) ٥θ (ب) θ (جـ) $-\theta$ (د) -٥θ

24 إذا كانت $ت^{٢} = -١$ وكانت θ هي سعة العدد المركب $ع = ٣ - ٧ ت$ ، فإن $ظا ٢\theta$ = ...

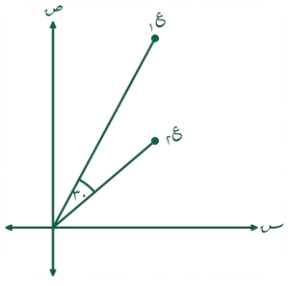
(أ) $\frac{١٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{١٤}$ (جـ) $\frac{٢٠}{٢١}$ (د) $\frac{٢١}{٢٠}$

25 في الشكل المقابل :

إذا كانت $ت^{٢} = -١$ وكان $ع_{١} ، ع_{٢}$ عددان مركبان

و كان $|ع_{١}| = ٤ ، |ع_{٢}| = ٢$

فإن : $(\frac{ع_{١}^{٢}}{ع_{٢}^{٢}})$ = ...



(أ) $٢ (جتا\frac{\pi}{٣} + ت\, جا\frac{\pi}{٣})$

(ب) $٤ (جتا\frac{\pi}{٣} + ت\, جا\frac{\pi}{٣})$

(جـ) $٢ (جتا\frac{\pi}{٦} + ت\, جا\frac{\pi}{٦})$

(د) $٤ (جتا\frac{\pi}{٦} + ت\, جا\frac{\pi}{٦})$

26 إذا كانت $ت^{٢} = -١$ وكان $ع_{١} = ١ + \sqrt{٣}\, ت$ ،

$ع_{٢} = \sqrt{٢} (جتا٤٥° + ت\, جا٤٥°)$ فإن : $\left(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right)^{٦}$ = ...

(أ) ٨ (ب) $٨ ت$ (جـ) $٨ + ٨ ت$ (د) $٨ - ٨ ت$

27 إذا كانت سعة $(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}) = \frac{\pi}{١٢}$ ، سعة $(ع_{١} ع_{٢}) = \frac{\pi ٧}{١٢}$

سعة $(ع_{٣}^{٣} ع_{٣}) = \frac{\pi ٧}{٦}$ ، فإن سعة $(ع_{١} ع_{٢} ع_{٣})$ = ...

(أ) $\frac{\pi ١١}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi ٣}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi ٣}{٨}$ (د) $\frac{\pi ٣}{٢}$

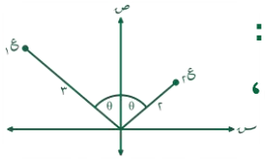
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

26

في مستوى أرجاند المقابل :

إذا كان ع١ ، ع٢ عددان مركبان ،

فإن : ع١ ع٢ = ...



(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) ٦ت (د) −٦ت

26

إذا كانت ت٢ = −١ وكان ع = (١ + √٣ ت)^٧ ، | ع | = ٨

، فإن السعة الأساسية للعدد المركب ع = ...

(أ) π (ب) −π (جـ) π/٣ (د) −π/٣

إذا كان ١ ، ω ، ω٢ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، ت٢ = −١ فإن :

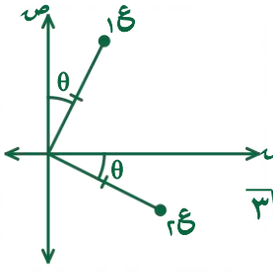
$\left(\frac{\omega}{\omega^3+2}-\frac{\omega^2}{\omega^3+2}\right)^2$ = ...

(أ) ١٢/٤٩ (ب) ٤٩/١٢ (جـ) −٤٩/١٢ (د) −١٢/٤٩

في الشكل المقابل :

إذا كان : | ع١ | = | ع٢ | = √٣

فإن : | ع١ + ع٢ | = ...



(أ) ٢ (ب) √٣٢

(جـ) √٦ (د) ٣

إذا كانت ت٢ = −١ وكان ع = √٥ هـ^{θت} حيث θ زاوية حادة ، ظا θ = ١/٢ فإن : ع = ...

(على الصورة الجبرية)

(أ) ١ + ٢ ت (ب) ٢ + ت

(جـ) ٣ + ت (د) ٣ + ٤ ت

إذا كان ت٢ = −١ وكان س + ص ت = (أ + ب ت)/(أ − ب ت)

فإن : س٢ + ص٢ = ...

(أ) أ٢ + ب٢ (ب) أ٢ − ب٢

(جـ) ٢أب (د) ١

إذا كان ت٢ = −١ فإن السعة الأساسية للعدد :

ع = ١ + ت ظا ٥٠° هي .....

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٣٠°

إذا كان ١ ، ω ، ω٢ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، وكان (١ + ω)^ن = (١ + ω٢)^ن

فإن أقل قيمة لـ ن الصحيحة الموجبة هي .....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

إذا كان ١ ، ω ، ω٢ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، فإن : ١ + ω + ω٢ + ... + ω^{١٠٠} = ...

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) ω (د) −ω٢

إذا كان ١ ، ω ، ω٢ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، فإن : $\sum_{ن=1}^{6}$ ١ + ω^ن = ...

(أ) صفر (ب) ٦

(جـ) ١ (د) ١ + ω

إذا كان ١ ، ω ، ω٢ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، وكان ت٢ = −١ فإن :

١ + ω ت + (ω ت)٢ + (ω ت)٣ + ... + (ω ت)^{٩٥} = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ω (د) ت

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

26 إذا كان $ت^{٢} = -١$ وكان : $ع_{١} = ٢ - ٢ت$ ، $ع_{٢} = \sqrt{٣} + ت$

$ع_{٣} = ا + بت$ وكان $|ع_{١} ع_{٣}| = ١٦$ ،

39 سعة $(\frac{ع_{٣}}{ع_{٢}}) = \frac{٧\pi}{١٢}$ ، فإن $(ا ، ب) =$ .....

(أ) $(٤ ، ٤)$ (ب) $(٤ ، -٤)$

(جـ) $(-٤ ، ٤)$ (د) $(-٤ ، -٤)$

26 إذا كان ١ ، س ، $س^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد

الصحيح ، وكان : $\frac{٦}{١ + س} = ا + ب س^{٢}$ ،

40 فإن : $ا + ب =$ .....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٥

26 إذا كانت $ت^{٢} = -١$ وكان العدد المركب

$ع = \frac{١ + ٣ت}{٢ + ت}$ فإن العدد $\overline{ع}^{٣}$ في الصورة الأسية

41 يساوي .....

(أ) $٤ هـ^{\frac{٣\pi}{٤} ت}$ (ب) $٢\sqrt{٢} هـ^{\frac{٣\pi}{٤} ت}$

(جـ) $٢ هـ^{-\frac{\pi}{٤} ت}$ (د) $٢\sqrt{٢} هـ^{-\frac{٣\pi}{٤} ت}$

26 إذا كان $ت^{٢} = -١$ وكان : سعة $(ع^{٢}) = ٣٠°$ ،

$\frac{٦٤}{ع} = ع$ فإن ع بالصورة الأسية = ...

42 (أ) $٦٤ هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$ (ب) $١٦ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$

(جـ) $٨ هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$ (د) $٨ هـ^{\frac{\pi}{١٢} ت}$

إذا كان ١ ، س ، $س^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد

الصحيح ، فإن : قيم س التي تحقق المعادلة

الآتية في ك : $(٣س - ٢)^{٣} = ٨$ هي .....

43 (أ) ١ ، س ، $س^{٢}$

(ب) ٢ ، ٢س ، $٢س^{٢}$

(جـ) $\frac{٤}{٣} ، -\frac{٢}{٣} س ، -\frac{٢}{٣} س^{٢}$

(د) $١ ، \frac{٢}{٣} س ، \frac{٢}{٣} س^{٢}$

إذا كانت $ت^{٢} = -١$ وكانت السعة الأساسية

للعدد $ع = \frac{-\pi}{٣}$ فإن السعة الأساسية للعدد

44 $(ع + ت ع)$ تساوي .....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi٥}{١٢}$ (جـ) $\frac{\pi٧}{١٢}$ (د) $\frac{\pi٣}{٤}$

إذا كانت $ت^{٢} = -١$ وكان $ع_{١} = ٢ هـ^{\frac{\pi٢}{٣} ت}$ ،

45 $ع_{١} ع_{٢} = ٨ هـ^{\frac{\pi١١}{٣} ت}$ فإن حاصل ضرب الجذرين

التربيعيين للعدد $ع_{٢} =$ .....

(أ) $٤ هـ^{\pi ت}$ (ب) ٤ (جـ) $٤ هـ^{\frac{\pi}{٢} ت}$ (د) ١٦

إذا كان ١ ، س ، $س^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد

الصحيح ، $ت^{٢} = -١$ ، وكان ع عدد مركب :

$ع = (-٢س^{٢} - ٢س)(ت + \frac{١}{س})(ت + \frac{١}{س^{٢}})$

46 فإن $\sqrt{ع}$ بالصورة الأسية .....

(أ) $\pm\sqrt{٢} هـ^{-\frac{\pi}{٤} ت}$ (ب) $\pm\sqrt{٢} هـ^{-\frac{٣\pi}{٤} ت}$

(جـ) $\pm هـ^{\frac{\pi}{٤} ت}$ (د) $\pm\sqrt{٢} هـ^{\frac{\pi}{٤} ت}$

إذا كانت النقطة ا $(٢ ، ٥)$ تمثل العدد المركب ع

على شكل أرجاند النقاط ب ، جـ ، د

47 تمثل $\overline{ع}$ ، $-ع$ ، $-\overline{ع}$ على الترتيب

فإن مساحة الشكل ابجد = ... وحدة مربعة

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ (جـ) ٤٠ (د) ٨٠

إذا كانت $ت^{٢} = -١$ وكان : ع عدد مركب :

$|ع (١ + ت)| = ٤\sqrt{٢}$ ، سعة $(\frac{ت^{١٣}}{ع}) = \frac{\pi}{٣}$

48 فإن : ع بالصورة الأسية .....

(أ) $٤ هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$ (ب) $٤ هـ^{\frac{\pi٥}{٦} ت}$

(جـ) $٤ هـ^{-\frac{\pi}{٦} ت}$ (د) $٤ هـ^{-٣٠ ت}$

الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

49 إذا كان ١ ، ω ، ω^{٢} هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح، فإن المقدار الآتي :

$$\left(\frac{أ + ω ب + ω^{٢} جـ}{ω^{٢} أ + ب + ω جـ} - \frac{جـ + أ ω^{٢} + ب ω}{ω جـ + ب ω^{٢} + أ}\right)^{٨}$$

يساوي .....

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

50 إذا كان $\frac{٢ + ٣ ع}{ع} = ٤ + ت$ حيث ع عدد مركب، ت^{٢} = −١، فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوي .....

(أ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{-\pi}{٤}$ (د) $\frac{-٣\pi}{٤}$

51 إذا كان العدد ع = (−$\sqrt{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$)^{٦}، فإن العدد ع = ... (حيث ت^{٢} = −١)

(أ) ٢ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

(ب) جتا π + ت جا π

(جـ) ٢٧ (جتا π + ت جا π)

(د) ٢ (جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$)

52 $\left(\frac{١ + جتا \frac{\pi}{١٢} + ت جا \frac{\pi}{١٢}}{١ + جتا \frac{\pi}{١٢} - ت جا \frac{\pi}{١٢}}\right)^{٧٢}$ = ... (حيث ت^{٢} = −١)

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) $-\frac{١}{٢}$

53 إذا كان ت^{٢} = −١ وكانت سعة (ع − ١ + ت) = π

وكان | ع | = ٢، فإن : ع = ...

(أ) ١ − $\sqrt{٣}$ ت (ب) − ١ + $\sqrt{٣}$ ت

(جـ) − $\sqrt{٣}$ − ت (د) ٣ − ت

54 إذا كانت : أ = جتا θ + ت جا θ فإن : $\frac{١ + أ}{١ - أ}$ = ...

حيث (ت^{٢} = −١)

(أ) ظتا $\frac{\theta}{٢}$ (ب) ظا $\frac{\theta}{٢}$

(جـ) ت ظتا $\frac{\theta}{٢}$ (د) ت ظا $\frac{\theta}{٢}$

55 إذا كان : | ع − ت | = | ع − ١ | حيث ع عدد مركب

فإن سعة العدد المركب (ع) يمكن أن تكون .....

(حيث ت^{٢} = −١)

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$

ثانيًا : أهم الأسئلة المقالية

56 إذا كانت ت^{٢} = −١ وكان ع = ٨ − ٦ ت أوجد ع$^{\frac{٣}{٢}}$ على الصورة الجبرية

57 إذا كانت ١ ، ω ، ω^{٢} هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح، ت^{٢} = −١ وكان ع = ٢(ω + ت) (ω^{٢} + ت)

أوجد الصور المختلفة للعدد ع ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة المثلثية.

58 إذا كانت ١ ، ω ، ω^{٢} هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح، فإن : $\sum_{ن=صفر}^{١٠}$ (١ + ω^{ن} + ω^{٢ن})

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

59 إذا كانت $ت^{٢} = -١$ وكان $ع = \left(\frac{\sqrt{٢٧}\, ت}{١ - ت}\right)^{\frac{٣}{٥}}$ أوجد :

مساحة سطح المضلع الذي رؤوسه النقط التي تمثل قيم ع على شكل أرجاند لأقرب وحدة مربعة

60 إذا كانت ١ ، ω ، $ω^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، أوجد المعادلة التربيعية التي معاملات حدودها أعداد حقيقية وأحد جذريها $(١ + ω + ٣ω^{٢})^{٢}$

61 إذا كان $ع^{٢} + ع + ١ = ٠$ أوجد القيمة العددية للمقدار : $(ع + \frac{١}{ع})^{٢} + (ع^{٢} + \frac{١}{ع^{٢}})^{٢} + (ع^{٣} + \frac{١}{ع^{٣}})^{٢}$

62 إذا كانت $ت^{٢} = -١$ وكان : $ع_{١} =$ جتا١١٤° + ت جا٦٦° ، $ع_{٢} =$ جتا٤٢° + ت جا ١٣٨° ، $ع_{٣} =$ جا٢٤° + ت جا١١٤°

أوجد الصورة الجبرية للعدد : $\frac{ع_{١} ع_{٢}}{ع_{٣}}$

63 إذا كانت $ت^{٢} = -١$ وكان : $ع_{١} =$ جتا٧٥° + ت جا٧٥° ، $ع_{٢} =$ جتا١٥° + ت جا١٥° ، أوجد الصورة المثلثية للعدد : $ع_{١} + ع_{٢}$

64 أوجد في ك مجموعة حل المعادلة الآتية :

$ع^{٣} + ٨ ت = ٠$ حيث $(ت^{٢} = -١)$

(اكتب الجذور على صورة $س + ص ت$)

65 إذا كانت ١ ، ω ، $ω^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، أثبت أن :

$$\left(\frac{١}{١ + ٣ω^{٢}} - \frac{١}{١ + ٣ω}\right)^{٢} = \frac{-٢٧}{٤٩}$$

66 إذا كانت $ت^{٢} = -١$ وكان

ع = ١ + ت + $ت^{٢}$ + ... + $ت^{٢٥}$ ، فأوجد الصورة المثلثية والصورة الأسية للعدد ع

67 إذا كانت ١ ، ω ، $ω^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن :

$$\left(\frac{ω}{١ + ٢ω}\right)^{٢} + \left(\frac{١ + ٢ω^{٢}}{ω^{٢}}\right)^{٢} = \frac{-١٠}{٣} ω^{٢}$$

68 إذا كانت ١ ، ω ، $ω^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن :

$(١ + ω^{٢} + ٢ω)^{ن٣} + (١ + ω + ٢ω^{٢})^{ن٣} = ٢$

حيث ن عدد صحيح موجب

69 إذا كان $ت^{٢} = -١$ أوجد في ك مجموعة حل المعادلة : $س^{٢} + (١ + ت) س - ٦ + ٣ت = ٠$

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

خامسًا : سلوك الدالة

أولًا : النقط الحرجة

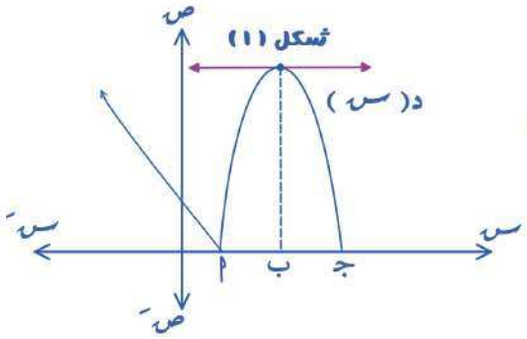
يكون للدالة د المتصلة على الفترة [أ ، ب [نقطة حرجة (جـ ، د (جـ)) حيث :
جـ ∈] أ ، ب [إذا كـــــان :
د َ (جـ) = ٠ (مماس أفقي)

● د َ (جـ) غير معرفة وذلك بسبب :
مماس رأسي أو الميلين من اليمين والشمال مختلفين .

مع مراعاة أن :
النقطة الحرجة لابد أن ∈ مجال الدالة [د (جـ) معرفة]

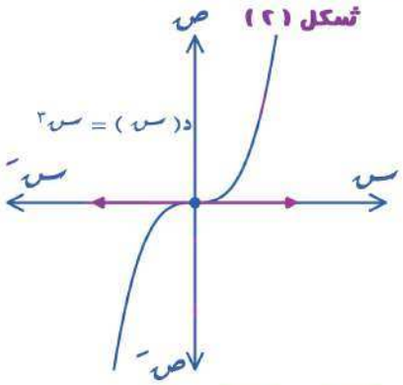
أشكال بيانية لتوضيح النقط الحرجة :

شكل (١)



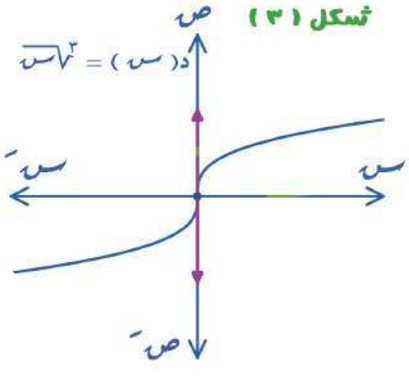
في شكل (١)
● (أ) نقطة حرجة وفصلت تزايد وتناقص د (س)
وعندها ميلين مختلفين [د َ (أ) غيـــر معرفة]
● (ب) نقطة حرجة وفصلت تزايد وتناقص
وعندها مماس أفقي [د َ (ب) = ٠]

شكل (٢)



في شكل (٢)
● المماس عند (٠ ، ٠) أفقي د َ (٠) = ٠ ولذلك
(٠ ، ٠) نقطة حرجة لمنحنى الدالة د ولكنها
لم تفصل تزايد وتناقص الدالة.

شكل (٣)



في شكل (٣)
● المماس عند (٠ ، ٠) رأسيـًا د َ (٠) غير معرفة
ولذلك (٠ ، ٠) نقطة حرجة لمنحنى الدالة د
ولكنها لم تفصل تزايد وتناقص الدالة.

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الخلاصة :

إن النقط الحرجة مش شرط تفصل تزايد وتناقص والشرطين بتوعها إن :

(1) عندها المشتقة الأولى بـ صفر أو غير معرفة

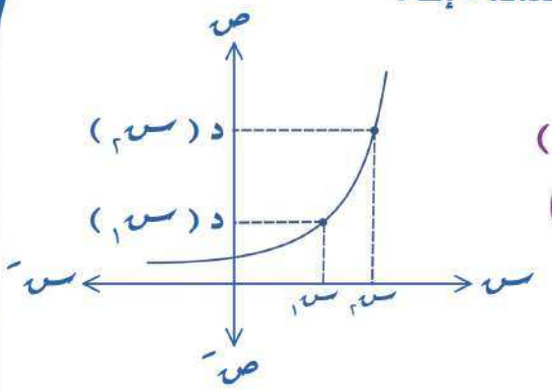
(2) لازم النقطة ∈ لمجال الدالة ومتكونش حدية

النقط الحرجة التي عندها المماس أفقي تسمى نقط توقف

ثانيًا : فترات التزايد والتناقص

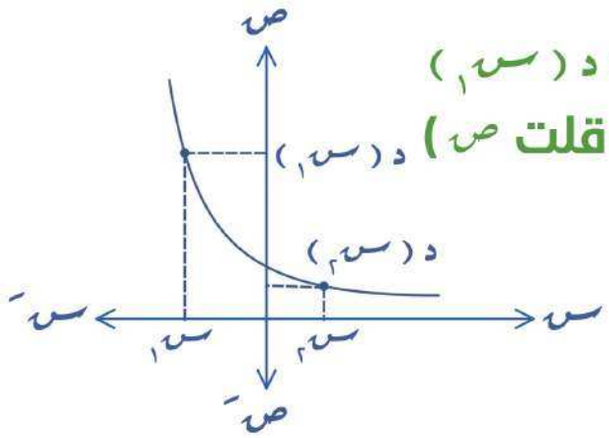
يمكن التعرف على فترات التزايد والتناقص للدالة د إما :

بيانيـاً : من رسم منحنى الدالة د :



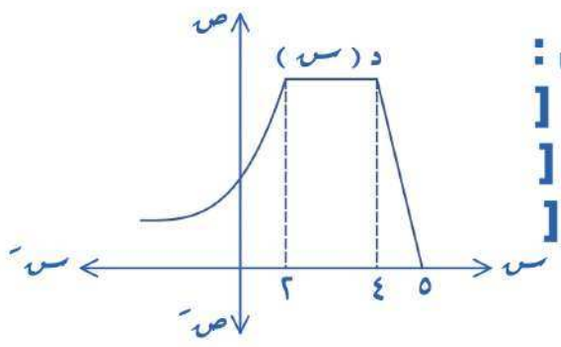
(1) س٢ > س١ ، د (س٢) > د (س١)

∴ د تزايدية (كلما زادت س زادت ص)



(2) س٢ > س١ ، د (س٢) < د (س١)

∴ د تناقصية (كلما زادت س قلت ص)

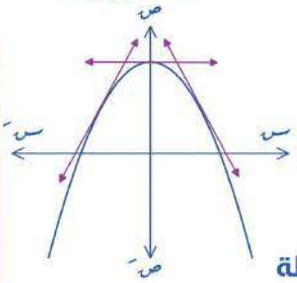


فمثلًا : في الشكل المقابل :

- منحنى د يتزايد في] − ∞ ، ٢ [
- ثابت فـــــــي] ٢ ، ٤ [
- يتناقـــــــص في] ٤ ، ٥ [

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

أو



جبريًا : من إشارة المشتقة الأولى لها :

(1) الدالة تتزايد في فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها عند أي نقطة عليه في هذه الفترة موجبا أي أن إذا كانت :
د َ (س) > ٠ في فترة ما فإن منحنى د (س) يتزايد في هذه الفتـرة

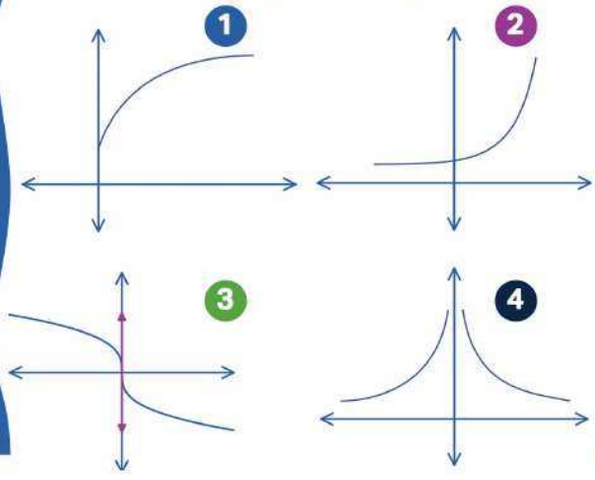
(2) الدالة تتناقص في فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها عند أي نقطة عليه في هذه الفترة سالبا أي إذا كانت :
د َ (س) < ٠ في فترة ما فإن منحنى د (س) يتناقص في هذه الفتـرة

(3) د َ (س) = ٠ في فترة ما فإن منحنى د (س) ثابتًا في هذه الفتـرة

ملاحظات على فترات التزايد والتناقص

بعض الدوال تكون تزايدية على مجالها أو تناقصية على مجالها فقط :

1. تزايدية دائمًا على الفترة] −∞ ، ∞ [
2. ليس لها نقط حرجة وتزايدية على مجالها ح
3. لها نقط حرجة (٠ ، ٠) وتناقصية على مجالها ح وليس ح − { ٠ }
4. وجود نقطة حرجة لا يعني بالضرورة وجود فترات تزايد وتناقص والعكس صحيح وجود فترات تزايد وتنـــاقص لا يعني وجود نقط حرجة . (رسمة (4))



5. لو النقطة الحرجة
   - فصلت التزايد والتناقص : نفتح عندها الفترة
   - مفصلتش التزايد والتناقص : نقفل عندها الفترة
6. النقط الحدية بنفتح عندها فترات التزايد والتناقص

خطوات تعيين التزايد والتناقـــــص

1. نحدد مجال د (س)
2. نوجد د َ (س)
3. نضع : د َ (س) = ٠
   أو د َ (س) غير معرفة فنحصل على النقط التي من المحتمل أن تكون نقط حرجة (لابد أن ∋ مجال د)
4. نرسم خط اعداد يمثل مجال د (س) ونضع عليه النقط الناتجة من خطوة رقم (٣) ثم نبحث إشارة د َ (س) في الفترات ومنها نحدد اضطراد د (س)

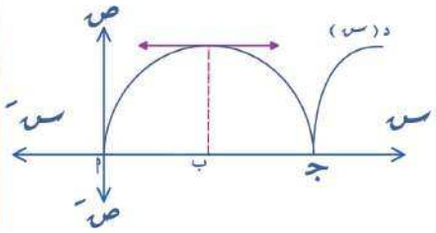
- د َ (س) > ٠ ← د (س) تزايدية
- د َ (س) < ٠ ← د (س) تناقصية
- د َ (س) = ٠ ← د (س) ثابتة

لاحظ :
- لو قدرت ترسم الدالة (رسمتها سهلة) ومتشتغلش جبريًا يبقي كويس
- لو الدالة ملهاش نقط حرجة برضو تبحث الإشارة

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK

ثالثًا : القيم القصوى المحلية :

- نعلم أن النقطة الحرجة قد تفصل فترات التزايد والتناقص وقد لا تفصلها وإذا فصلتها فإن النقطة الحرجة حينها تصنف إلي :
  (1) عظمى محلية (أكبر من اللي حواليها)
  (2) صغرى محلية (أصغر من اللي حواليها)
- نقدر نقول القيم العظمى والصغرى المحلية هي أنواع (تصنيف) النقط الحرجة التي تفصل فترات التزايد والتناقص لـ د
- القيم المحلية هي نقط حرجة فصلت فترات التزايد والتناقص أو فترات الاضطراد بصفة عامة

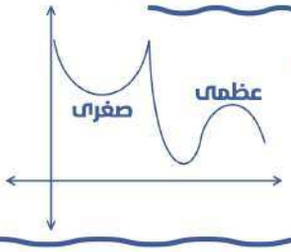


- في الشكل نلاحظ أن : ب ، جـ نقاط حرجة إلا أن :
  ب : عظمى محلية ← د (ب)
  جـ : صغرى محلية ← د (جـ)

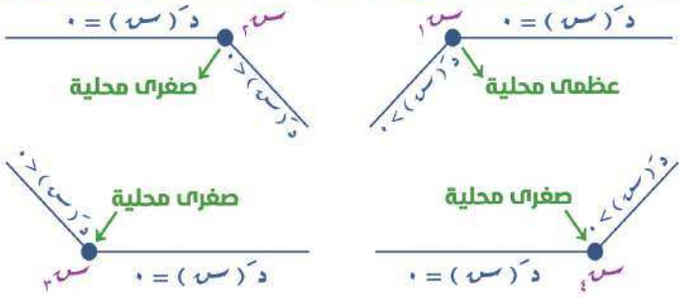
وذلك فإن : نقط القيم العظمى والصغرى المحلية تكون نقط حرجة ولكن العكس غير صحيح (كل القيم المحلية نقط حرجة وليس كل النقط الحرجة محلية)

ملاحظات على القيم العظمى والصغرى المحلية

- إذا كانت د تزايدية أو تناقصية على مجالها فإن : د ليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية (رغم إن وارد يكون ليها نقط حرجة)
- القيمة العظمى المحلية ممكن تكون أصغر من القيمة الصغرى المحلية (ملهمش علاقة ببعض)
  (مينفعش نقارن بينهم)



- حالة خاصة :
  (الدالة الثابتة)



د (س) ثابتة : جميع النقط عندها د` (س) = ٠ وتعتبر عظمى وصغرى في نفس الوقت

ومن هنا نقدر نعيد تعريف :
- القيمة العظمى المحلية : أكبر من أو تساوي اللي حواليها
- القيمة الصغرى المحلية : أقل من أو تساوي اللي حواليها

- النقط المحلية هي النقط الحرجة (س ، ص) أما القيم المحلية هي الـ ص فقط

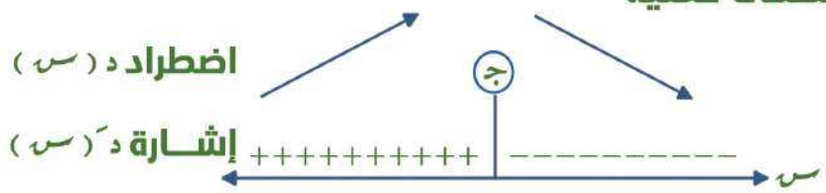
WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK

اختبار التعرف على القيم المحلية

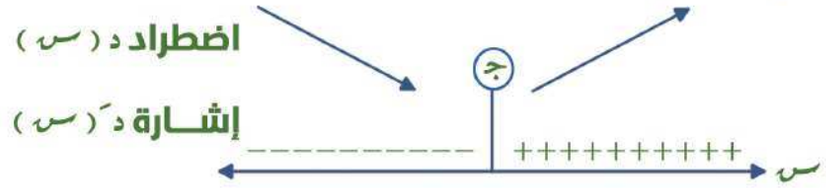
- نوجد النقط الحرجة ولتكن (جـ ، د (جـ)) ثم نصنفها إلي عظمى أو صغرى أو ليست عظمى و ليست صغرى بإستخدام :

إما (أ) اختبار المشتقة الاولى :

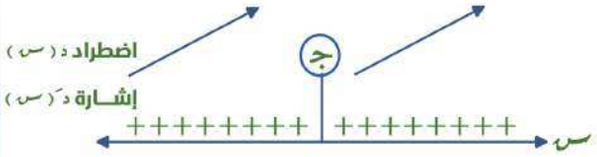
- إذا كان د َ (س) < ٠ عندما س < جـ ، د َ (س) > ٠ عندما س > جـ فإن :
  د (جـ) قيمة عظمى محلية

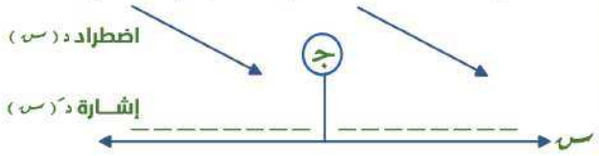


- إذا كان د َ (س) > ٠ عندما س < جـ ، د َ (س) < ٠ عندما س > جـ فإن :
  د (جـ) قيمة صغرى محلية



- إذا لم يحدث تغيير في إشارة د َ (س) على جانبي جـ فإنه لا يوجد للدالة عند جـ قيمة عظمى أو صغري محلية .





أو (ب) اختبار المشتقة الثانية : (إشارتها)

إذا كان د ً (جـ) > ٠ ← د (جـ) صغرى محلية

إذا كان د ً (جـ) < ٠ ← د (جـ) عظمى محلية

إذا كان د ً (جـ) = ٠ ← يفشل الاختبار في تحديد نوع النقطة الحرجة ونضطر نلجأ لاختبـار المشتقة الأولى

لاحظ !

اختبار المشتقة الأولى أعم (لانه مابيفشلش) وأفضل (لإن مش دايـــــــما المشتقة الثانية هتكون بسيطة) ويفضل اختبار المشتقة الثانية مع الدوال المثلثية

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

خطوات بحث القيم المحلية جبريًا

1 نوجد مجال د (س) 2 نوجد د َ (س)

3 نضع د َ (س) = ٠

أو د َ (س) غير معرفة فنحصل على النقط التي من المحتمل أن تكون حرجة (بشرط ∋ للمجال)

4 طبق اختبار المشتقة الأولى أو الثانية لتصنيف النقط الحرجة

رابعًا : القيم القصوى المطلقة

هي أكبر وأقل قيمة للدالة على الإطلاق ومن خلال دراستها وجد أنها موجودة دائما عند بداية أو نهاية الدالة أو عند القيم المحلية في الفترة التي تكون الدالة معرفة فيها . (إيجاد القيم المطلقة يعني إيجاد مدى الدالة)

وتكون دائمًا قيم منفردة (Unique)

خطوات تعيين القيم المطلقة

1 نوجد مجال د (س) (غالبا معطى [أ ، ب])

2 نعين النقط الحرجة التي عندها : د َ (س) = صفر أو د َ (س) غير موجودة وتنتمي لمجال الدالة [المفروض نصنفها محلية ولا لا بس مش هنعمل كدة لانها لو مش محلية مش هتكون مطلقة]

3 نحسب قيمة الدالة د عند س = أ ، س = ب ، عند النقط الحرجة (أكبرهم عظمى مطلقة / أصغرهم صغرى مطلقة)

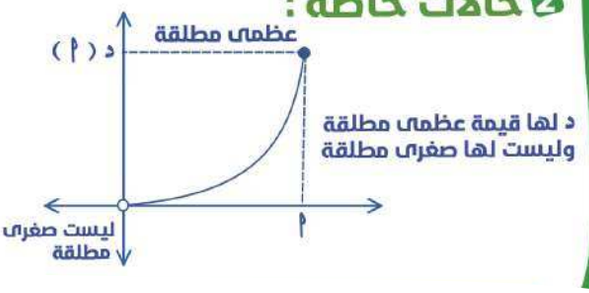
ملاحظات على القيم المطلقة

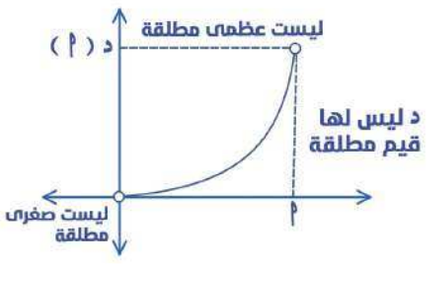
1 إذا كانت د معرفة على الفترة [أ ، ب] وكانت :
د َ (س) > ٠ (د تزايدية على نفس الفترة) فإن :
د (أ) صغرى مطلقة ، د (ب) عظمى مطلقة

تكون القيم المطلقة عند بداية ونهاية الفترة فقط إذا كانت : د تزايدية على مجالها أو تناقصية

منخص ما سبق

2 حالات خاصة :

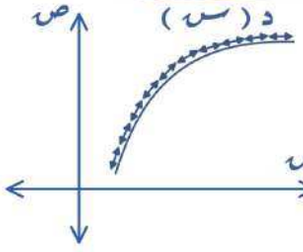




WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

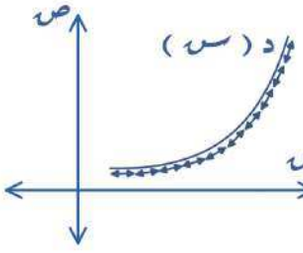
3 مش كل القيم المطلقة محلية ومش كل القيم المحلية مطلقة

خامسًا : التحدب ونقط الانقلاب



● التحدب لأعلى : (التقعر لأسفل)
المنحنى يقع أسفل جميع مماساته

لاحظ :
د َ (س) تتناقص (ميل المماس يتناقص)
ومنها د ً (س) < ٠



● التحدب لأسفل : (التقعر لأعلى)
المنحنى يقع اعلى جميع مماساته

لاحظ :
د َ (س) تتزايد (ميل المماس يـــــتزايد)
ومنها د ً (س) > ٠

أي أن : تحدب منحنى د (س) يمكن التعرف عليه إما من تزايد وتناقص د َ (س) أو من إشارة د ً (س)

نقطة الانقـــــــلاب

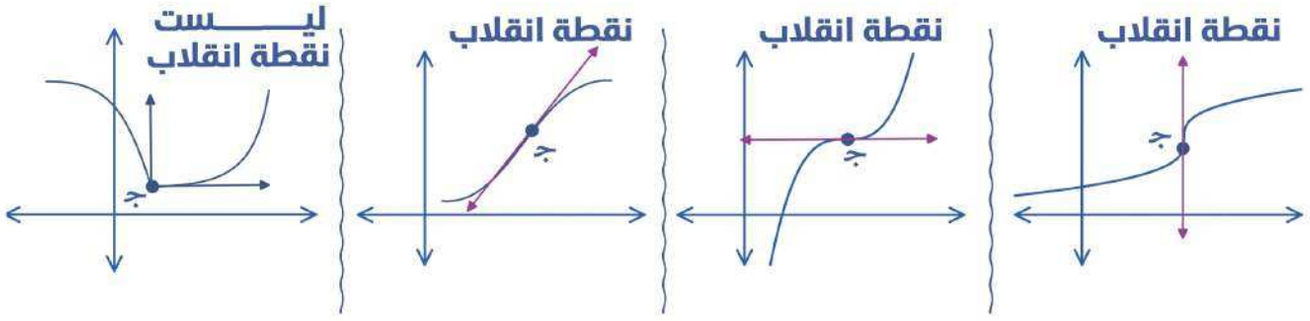
•إذا كان جـ ∋ مجال د فإن : النقطة (جـ ، د (جـ)) تكون نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تحقق الآتي :

(أ) منحنى د متصل عند جـ

(ب) يمكن رسم مماس وحيد لمنحنى الدالة د عند جـ (مهما كان ميله حتى لو مماس رأسي ميله غير معروف) لكن ميكونش ليها ميلين مختلفين (في الدالة الفرعية)

(جـ) تتغير إشارة د ً (س) حول جـ (د ً (جـ) = ٠ أو د ً (جـ) غير معرفة)
أو تفصل تزايد وتناقص د َ (س) أو تفصل فترات تحدب منحنى د (س)

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK



لاحظ :

نقطة الانقلاب لازم تفصل فترات تحدب د (س) ولو مافصلتش متبقاش نقطة انقلاب

تلخيص شروط نقطة الانقلاب

1. ∈ مجال د
2. عندها د′ (س) = ٠ أو غير معرفة
3. تفصل تحدب د (س)

(1 + 2 + 3 في الدوال الغير فرعية)

4. د′ (جـ)$^{+}$ = د′ (جـ)$^{-}$ ← في الدوال الفرعية

عند النقطة اللي بيختلف حواليها تعريف الدالة

ليها ٣ شروط في الدوال الغير مجزأة و ٤ شروط في الدوال المجزأة

خطوات تعيين فترات التحدب ونقط الانقلاب

1. نوجد مجال د (س) ، نوجد د′ (س)
2. نوجد د″ (س)
3. نضع د″ (س) = ٠ أو د″ (س) غير معرفة فنحصل على النقط التي من المحتمل أن تكون نقط انقلاب
4. نضع مجال د (س) على خط الأعداد ونضع عليه النقط الناتجة من خطوة (٣) ونبحث إشارة د″ (س) في الفترات ومنها نحدد اضطراد د′ (س) / تحدب د (س)

(د″ (س) > ٠ ← د′ (س) تزايدية ، د (س) : محدبة لأسفل والعكس صحيح)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

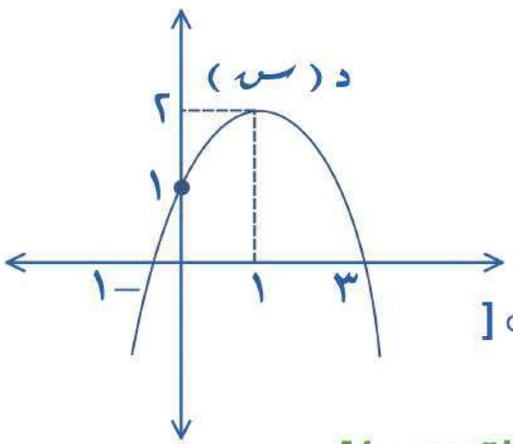
لاحظ

- نقطة الانقلاب لـ د (س) هي :
نقطة عندها د$'$ (س) = ٠ وهي نقطة حرجة لـ د$'$ (س) ولازم تفصل تحدب د (س) واضطراد د$'$ ، وتفصل إشارة د$'$ ولازم يكون عندها مماس وحيد

سادسًا : رسم المنحنيات

- إشارة أي دالـــــة :
لو واقعه فوق محور س تكون موجبة ولو تحت محور س سالبة ولو عند محور س بـ صفر

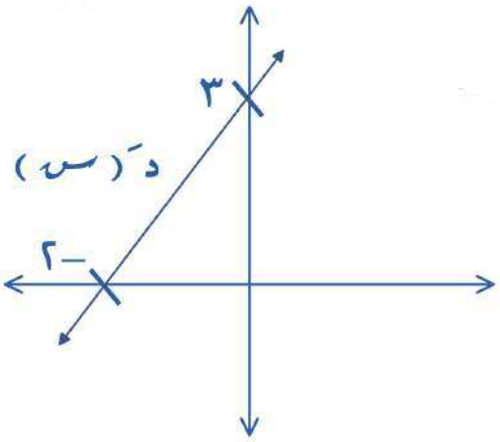
الشكل (١)



- د (-١) = د (٣) = ٠
- د (٠) = ١ ، د (١) = ٢
- د (س) > ٠ ∋ س] -١ ، ٣ [
- د (س) < ٠ ، س ∋] -∞ ، -١ [∪] ٣ ، ∞ [
- د$'$ (١) = صفر
[مماسها أفقي أو عندها مبيحصلش تغير في حالة د (س)]
- د$'$ (٢) < ٠
[مماسها بيعمل زاوية منفرجة أو موجودة في فترة فيها د (س) تناقصية]
- د$''$ (٣) ، د$''$ (٤) ، د$''$ ($-\frac{١}{٢}$) > ٠ ← [لأن منحنى د محدب لأعلى]

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

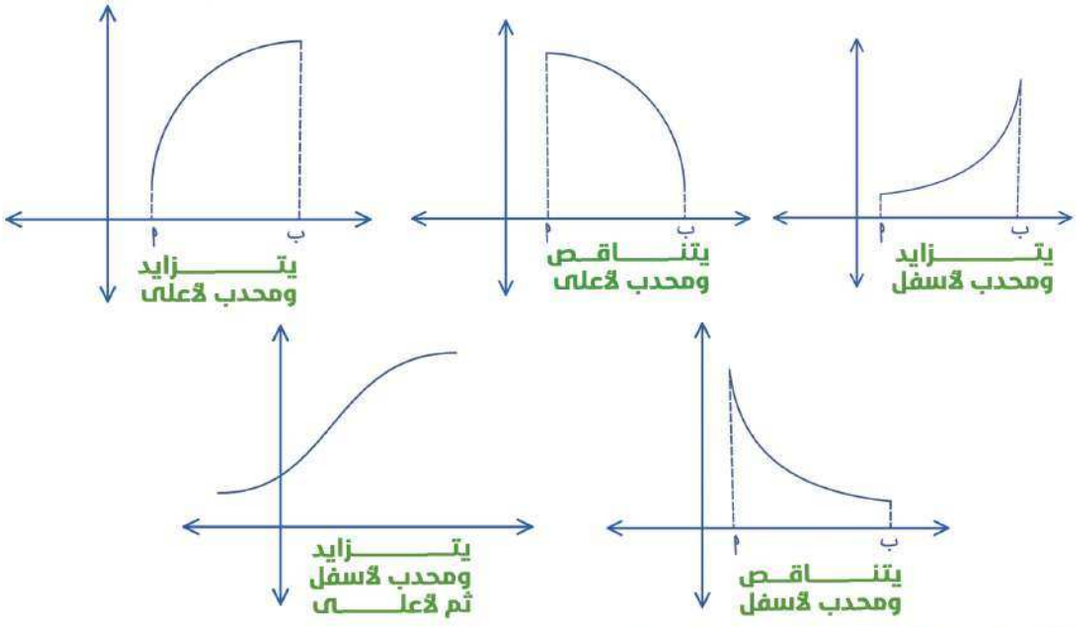
الشكل (٢)



- د َ (-٢) = ٠ ● د َ (٠) = ٣
- د َ (س) > ٠ ∀ س > -٢
- د َ (س) < ٠ ∀ س < -٢
- د (س) **تزايدية** ∀ س > -٢
- د (س) **تناقصية** ∀ س < -٢
- د ً (٠) = د ً (٣) = د ً (-٥) = **ميل الخط** = $\frac{٣}{٢}$
- **منحنى** د (س) **محدب لأسفل** ، س ∈ ح
  (د َ (س) **تزايدية** ∀ س ∈ ح **أو** د ً (س) > ٠ ∀ س ∈ ح)
- **منحنى** د (س) د **ليس لها نقط انقلاب**
- **منحنى** د **له قيمة صغرى محلية عند** س = -٢

لرسم الدوال

- تعين فترات التزايد والتناقص وفترات التحدب وتعين مجموعة نقط من بينها النقط الحرجة ونقط الانقلاب إن أمكن مع مراعاه مجالة الدالة .



- علشان كدة لما بنرسم بنحتاج التزايد والتناقص والتحدب الاثنين (واحد فيهم غير كافي)

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظـــــــــــــــات :

- منحنى الدالة التربيعية يكون محدبا لأعلى إذا كان أ < ٠ ومحدبا لأسفل إذا كان أ > ٠ حيث : أ معامل س^{٢}
- المماس الانقلابي : هو المماس عند نقطة الانقـــــلاب
- تزايد وتناقص الشئ لا يدل على إشارة الشئ ، وإنما يدل علـــــــى إشارة المشتقة الأولى للشئ (تعيين اضطراد د (س) ملوش علاقة بإشارة د)
- إذا كانت س = أ نقطة حرجة للدالة د فمن المؤكد أن د$'$(أ) = ٠ أو غير معرفة ، د$'$(أ) = أي حاجة (ملهاش قاعدة)
- إذا كانت س = أ نقطة انقلاب للدالة د فمن المؤكد أن د$''$(أ) = ٠ أو غير معرفة ، د$''$(أ) = أي حاجة (ملهاش قاعدة)
- إشارة د$'$(س) هي هي تزايد وتناقص د (س)
  إشارة د$''$(س) هي هي تزايد وتناقص د$'$(س) هي هي تحدب د (س)

- إذا كانت د دالة لها قيمة عظمى محلية عند س = أ وقيمة صغرى محلية عند س = ب فإن د دالة لها نقطة انقلاب عند س = $\frac{أ + ب}{٢}$

- وانت شغال في سلوك الدالة لازم تبقى ص = د(س)

يعني لو جالك عايز تزايد وتناقص أ، تحدب الدالة زي مثلًا :

ص = س^{ن} ← س ← $لـــو_{هـ}$ ص = $لـــو_{هـ}$ س^{ن} ∴ $لـــو_{هـ}$ ص = ن $لـــو_{هـ}$ س ∴ ص = هـ$^{\frac{لـــو_{هـ} س}{س}}$ ← وتشتغل من هنا

أ، ص = ب^{٢}، س = $لـــو_{هـ}$ ب

ب = هـ^{س} ∴ ص = (هـ^{س})^{٢} = هـ^{٢س} ← وتشتغل من هنا

﴿قَالَ سَـَٔاوِيٓ إِلَىٰ جَبَلٖ يَعۡصِمُنِي مِنَ ٱلۡمَآءِۚ﴾

[هود: ٤٣]

الذي تربّى في بيت نبي غرق بالطوفان, والذي تربى في بيت فرعون شق البحر بعصاه, ليس المهم أين تعيش بل كيف؟
ليس المهم البدايات بل النهايات!

WWW.JAWACADEMY.NET | WWW.MRAHMEDESSAM.COM | ENG/AHMED ESSAM ELDIN | ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

سادسًا : تطبيقات القيم العظمى والصغرى

حل مسائل التطبيقات

نعبر عن المتغير المراد إيجاده أكبر أو أقل قيمة له كدالة في متغير واحد وذلك بالاستعانة بمعطيات المسألة وقوانين المساحات والحجوم والنظريات والعلاقات الهندسية الهامة ثم نوجد القيم العظمى أو الصغرى لهذه الدالة

(نشتقها بالنسبة للمتغير المتبقي ثم نساوي المشتقة بالصفر)

ملاحظات مهمة!

- عند إيجاد أكبر حجم (ح) مثلًا :

نضع ح َ ($\frac{\text{دح}}{\text{دس}}$ أو $\frac{\text{دح}}{\text{دنه}}$ أو $\frac{\text{دح}}{\text{دع}}$ .....) = ٠

ونتاكد من أن ح ً < ٠ عند القيمة الناتجة (أو باختبار المشتقة الثانية)

- عند إيجاد أقل تكلفة (ت) مثلًا :

نضع ت َ = ٠ ونتاكد من أن : ت َ > ٠ وهكذا .....

- في المستوى الاحداقي تجنب تفرض س ، ص

- في المستوى استغل النقط اللي على الخطوط أو المنحنيات لأنها غالبًا بتحل المسألـــــــة

من فكرة إنها بتحقق معادلة المنحنى اللي بتقع عليه

- ص ≥ ك معناها إن ك هي أقل قيمة لـ ص

- ص ≤ ك معناها إن ك هي أكبر قيمة لـ ص

- ك١ ≤ ص ≤ ك٢ هما القيمتان الصغرى والعظمى لـ ص على الترتيب

- لو قالك رُسم (مثلث / مستطيل / مربع ، .....) داخل دائرة ده معناه إن الشكل جميع رؤوس على الدائرة
- منحنى الدالة التربيعية له محور تماثل وهو الخط الرأسي المار بنقطة رأس المنحنى وده خط بينصف أي خط أفقي معدي على المنحنى

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

الوحدة الثانية تفاضل

أولًا : أهم أسئلة الاختيار من متعدد

25 **1** في الفترة [١ ، هـ] القيمة العظمى المطلقة للدالة د(س) = س^{٢} لـو$_{هـ}$ س هي .....

(أ) هـ^{٢} (ب) $\frac{١}{هـ^{٢}}$ (جـ) $\frac{-١}{هـ^{٢}}$ (د) صفر

25 **2** القيمة العظمى المطلقة للدالة د(س) = س هـ$^{-س}$ في الفترة [٠ ، ٢] تساوي .....

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{هـ}$ (جـ) $\frac{٢}{هـ^{٢}}$ (د) ١

25 **3** القيمة العظمى المطلقة للدالة د(س) = س + $\frac{٤}{س+٤}$ في الفترة [−٣ ، ٠] تساوي .....

(أ) $\frac{-٢٥}{٧}$ (ب) −٢ (جـ) $\frac{٢٥}{٧}$ (د) ١

25 **4** إذا كان ص = (س − ٢) هـ^{س} ، فإن منحنى الدالة ص يكون محدبًا لأسفل في الفترة .....

(أ)] ٠ ، ٢ [(ب)] −١ ، ٢ [

(جـ) ح (د)] ٠ ، ∞ [

25 **5** إذا كان للمنحنى ص = (أ − ٢س)^{٢} نقطة حرجة عند س = −١ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) −١ (جـ) −٢ (د) ١

26 **6** إذا كانت د(س) = $\frac{١}{٤}$ أ س^{٤} − ٨ ب س حيث أ ، ب ثوابت وكان لمنحنى الدالة قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ٥) فإن : أ + ب = ...

(أ) $\frac{-٥}{١٢}$ (ب) $\frac{-٥}{٦}$ (جـ) $\frac{٥}{١٢}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

26 **7** الدالة د : د (س) = س هـ$^{(س - س^{٢})}$ تكون تزايدية عند س ∈ .....

(أ) ح (ب)] ٠ ، ١ [

(جـ) ح$^{+}$ (د)] $-\frac{١}{٢}$ ، ١ [

26 **8** إذا كانت د(س) = ٦ لـو$_{٦}$ (س^{٢} + ٨) فإن النقطة .....

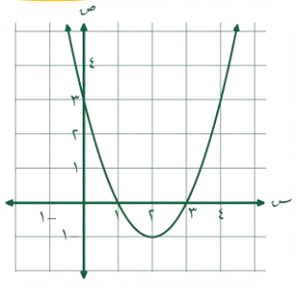
(أ) (٠ ، ٨) صغرى محلية للدالة د(س)

(ب) (٠ ، ٨) عظمى محلية للدالة د(س)

(جـ) (٠ ، ٦) صغرى محلية للدالة د(س)

(د) (٠ ، ٨) نقطة انقلاب للدالة د(س)

26 **9** في الشكل المقابل :



منحنى د$'$(س) ، فإن منحنى د(س) يكون محدب لأعلى عندما س ∈ .....

(أ)] −∞ ، ٢ [(ب)] ٢ ، ∞ [

(جـ)] ١ ، ∞ [(د) ح

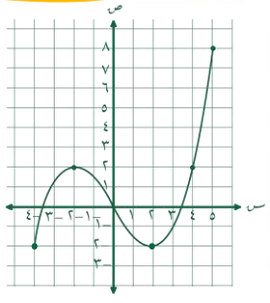
26 **10** إذا كان ص = د(س) حيث ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س^{٢} − ٢س ، فإن منحنى الدالة ص يكون محدبًا لأعلى عندما س ∈ .....

(أ)] −٢ ، ١ [(ب)] −١ ، ∞ [

(جـ)] −∞ ، −١ [(د) ح −] −٢ ، ١ [

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

11 يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د(س) فإن الدالة د(س) يكون لها نقطة انقلاب عند س ∈ .....



(أ) {١، −١}
(ب) {٠، ٣,٥، −٣,٥}
(جـ) {٢، −٢}
(د) {٤، −٤}

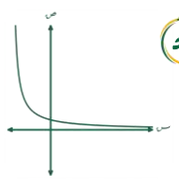
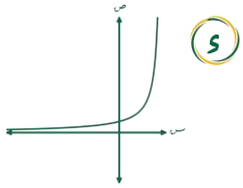
12 عددان صحيحان موجبان مجموعهما ٥ ومجموع مكعب أصغرهما وضعف مربع الآخر أصغر ما يمكن فإن العددين .....

(أ) ٣،٢
(ب) ٤،١
(جـ) ٢,٥، ٢,٥
(د) ٥،٠

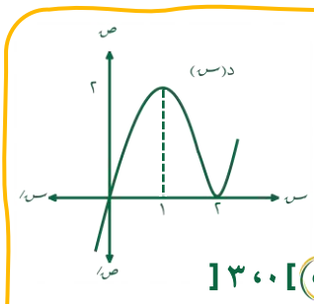
13 إذا كان د(س) > ٠، د'(س) < ٠ لجميع قيم س لمجال الدالة د فإن أي من الأشكال الآتية يمكن أن يعبر عن الدالة د .....

(أ)

(ب)

(جـ)

(د)


14 الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د فإن د' تكون سالبة في الفترة .....



(أ)]١، ٢[
(ب)]٠، ٣[
(جـ) ح −]١، ٢[
(د)]٠، ٢[

15 إذا كانت : د(س) = س لـــو س فإن : د'(س) لها نقطة حرجة عند س = ...

(أ) ١
(ب) هـ
(جـ) صفر
(د) $\frac{١}{هـ}$

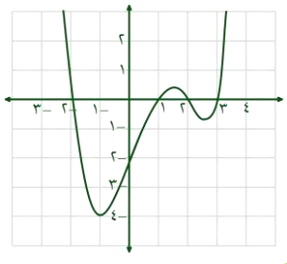
16 إذا كانت ص = س² + ٢س − ٨، فإن أقل قيمة للمقدار س ص − س³ هي .....

(أ) −٢
(ب) −٤
(جـ) −٨
(د) −١٦

17 إذا كان أ، ب، جـ ثلاث متغيرات بحيث كان جـ = أ ب، و كان أ + ٤ب = ٦٤ فإن أكبر قيمة لـ جـ = ...

(أ) ٨
(ب) ٣٢
(جـ) ٥١٢
(د) ٢٥٦

18 إذا كان الشكل المقابل : يمثل منحنى الدالة د' للدالة د، فإن منحنى الدالة يكون محدبًا لأعلى في الفترة .....



(أ)]١، ٢[
(ب)]−٢، ١[∪]٢، ٣[
(جـ)]١، ٢[∪]٣، ∞[
(د)]−٢، ٣[

19 في الشكل المقابل : أ ب جـ د متوازي أضلاع حيث إحداثي د (س، ٨ − ٢س)، فإن : أكبر مساحة لمتوازي الأضلاع تساوي ..... وحدة مربعة

(أ) ٣٢
(ب) ١٦
(جـ) ٨
(د) ٤

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

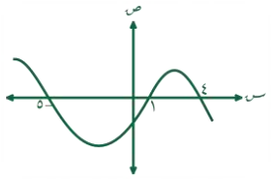
26 إذا كان المنحنى ص = س^{٣} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٩س + ٥ له نقطة حرجة عند س = −١، فإن المنحنى له

20 نقطة انقلاب عند ..... (حيث ا ثابت)

(ا) (١، ٦)　(ب) (−١، ٦)

(ج) (١، −٦)　(د) (١، ٦)

26 في الشكل المقابل :



منحنى مشتقة

الدالة ص = د(س)

أي من العبارات الآتية صحيحة ؟

21 (ا) للدالة ص = د(س) قيمة صغرى محلية عند س = −٥

(ب) للدالة ص = د(س) قيمة صغرى محلية عند س = ٤

(ج) للدالة ص = د(س) قيمة عظمى محلية عند س = ١

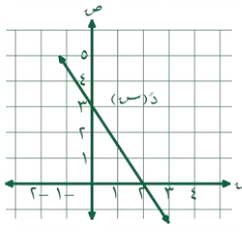
(د) الدالة ص = د(س) تزايدية في الفترة] −∞ ، − ٥ [

26 إذا كان محيط قطاع دائري ١٢ سم ، فإن قياس

22 زاوية القطاع بالتقدير الدائري الذي يجعل مساحته أكبر ما يمكن تساوي .....

(ا) ٢　(ب) ٦　(ج) ٣　(د) ٨

26 إذا كان الشكل



المقابل : يمثل

منحنى الدالة د'(س)

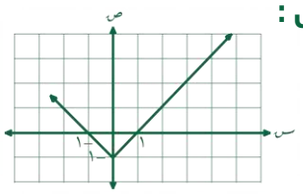
23 وكان د'(−١) = د'(٥) = صفر

، فإن منحنى الدالة د(س)

له قيمة عظمى محلية عند س = ...

(ا) صفر　(ب) ٢　(ج) −١　(د) ٥

26 إذا كان الشكل المقابل :



هو منحنى المشتقة

الأولى للدالة د ، فإن

24 منحنى الدالة د يكون

له نقطة انقلاب عند س ∈ .....

(ا) {١}　(ب) {−١}

(ج) {١، −١}　(د) {٠}

26 إذا كانت النقطة (١، ١٢) هي نقطة انقلاب

25 لمنحنى الدالة د : د(س) = اس^{٣} + بس^{٢}

فإن : ا − ب = ...

(ا) ٢٤　(ب) −٢٤　(ج) ١٢　(د) −١٢

25 الدالة د : د(س) = $\frac{٤}{س^{٢}+١}$ تكون .....

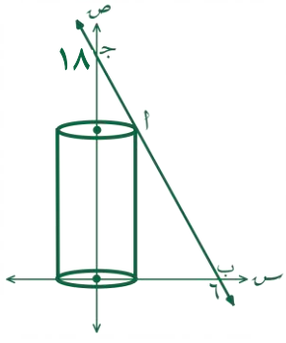
(ا) تزايدية في ح

26 (ب) تناقصية في] −∞ ، ٤ [

(ج) تناقصية في ح − {١، −١}

(د) تزايدية في] −∞ ، ٠ [

25 في الشكل المقابل :



أكبر حجم للإسطوانة

الدائرية القائمة

27 يساوي ..... سم^{٣}

ملاحظة النقطة ا تقع

في المستوى س ص

، المحور ص هو محور تماثل الأسطوانة

(ا) ٧٢ π　(ب) ٩٦ π　(ج) ١٢٠ π　(د) ١٤٤ π

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

23 الدالة د : د(س) = لـو$_{\frac{1}{2}}$ (س^{2} – ٤)

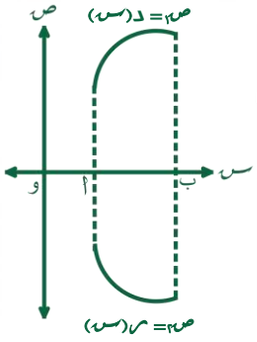
28 تزايدية في الفترة .....

(أ)] ∞ ، ٠ [(ب)] – ∞ ، ٠ [

(جـ)] ٢ ، ∞ [(د)] – ∞ ، ٢ [

24 إذا كانت ص$_{1}$ = د(س) ، ص$_{2}$ = ر(س) دالتان قابلتان للاشتقاق في الفترة [أ ، ب] فأي من الدوال الآتية دائما تزايدية في الفترة] أ ، ب [؟

29



(أ) د(س) + ر(س)

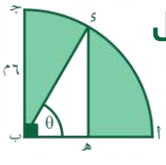
(ب) د(س) – ر(س)

(جـ) د(س) × ر(س)

(د) $\frac{د(س)}{ر(س)}$

25 إذا كان الشكل المقابل يمثل ربع دائرة مركزها ب ، فإن أصغر مساحة للشكل المظلل تساوي ..... متر^{2}

30



(أ) ٩ π + ٩ (ب) ٦ π + ٦

(جـ) ٦ π – ٦ (د) ٩ π – ٩

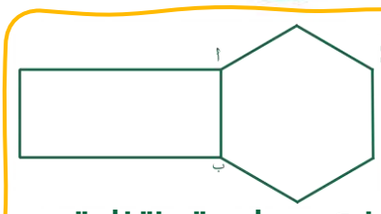
26 الدالة د(س) = س – لـو$_{\frac{1}{2}}$ س^{2}

31 تكون تناقصية في الفترة .....

(أ)] ٢ ، ∞ [(ب)] – ∞ ، ٠ [

(جـ)] ٢ ، ٠ [(د) ح

27 في الشكل المقابل :



تم فصل حديقتين إحداهما مستطيلة يزرع فيها التفاح والأخرى سداسية منتظمة الشكل يزرع فيها الورد وتم تركيب صفين (مزدوج) من الأسلاك على جميع الأحرف باستثناء $\overline{أب}$ ، فإذا كان طول السلك المستخدم ١٢٠ متر فإن أقصي مساحة يزرع فيها التفاح هي ..... متر^{2}

32

(أ) ٦٠ (ب) ٧٥ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

26 للدالة د : د (س) = جا س – جتا س عندما

33 س ∈ [٠ ، π] قيمة صغرى مطلقة تساوي .....

(أ) –٢ (ب) –١ (جـ) ١ (د) ٢

26 إذا كانت د(س) = (س – ٤) | س |

34 حيث س ∈ [١ ، ٤] ، فإن القيمة الصغرى المطلقة تساوي .....

(أ) –٥ (ب) –٤ (جـ) –٣ (د) صفر

26 إذا كانت د : د(س) = س + ٢ جتا س

35 حيث س ∈] ٠ ، ٢π [فإن الدالة د قيمة عظمى محلية عندما س = ...

(أ) $\frac{π}{٦}$ (ب) $\frac{٥π}{٦}$ (جـ) $\frac{π}{٣}$ (د) $\frac{٢π}{٣}$

26 إذا كانت د(س) = $\sqrt[٣]{س^{2} - ١}$ ، س ∈ [–١ ، ٢] ،

36 فإن الدالة د قيمة صغرى مطلقة عند س = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) –١ (د) صفر

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

37 إذا كانت $ر(س) = ٢ لـو_هـ س - س^٢$
فإن الدالة ر تتزايد في .....
(أ)]٠، ١[(ب)]١، ∞[
(جـ)]٠، ∞[(د)]١، ٠[

38 القيمة المحلية للدالة د : د = $\frac{\sqrt{س - ١}}{س}$
تساوي .....
(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) $-\frac{١}{٢}$

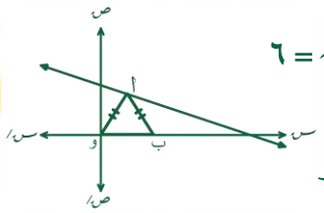
39 إذا كانت $د(س) = ٢ - ٣(س - ٣)^{\frac{٤}{٣}}$
فإن الدالة د تتزايد في .....
(أ)]-∞، ٣[(ب)]٣، ∞[
(جـ)]-∞، ∞[(د)]-∞، ٢[

40 إذا كانت $د(س) = \frac{س^٢}{١ - س}$
فإن القيمة الصغرى المحلية للدالة د هي .....
(أ) ٠ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) -٤

41 أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم ، م ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث
ب م = س سم ، ن ∈ $\overline{جـ د}$ بحيث جـ ن = $\frac{٣}{٢}$ س ،
فإن قيمة س التي تجعل مساحة Δ أ م ن أصغر مايمكن هي .....
(أ) ٢٥ (ب) $\frac{١٢٥}{٣}$ (جـ) $\frac{١٠}{٣}$ (د) ٥٠

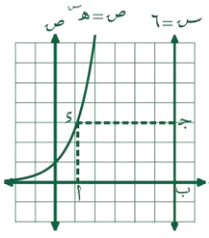
42 القيمة الصغرى المطلقة للدالة د :
$د(س) = \frac{س^٢}{٣ - س} + ١$،
س ∈ [-٢، ١] تساوي .....
(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) ٦

43 إذا كانت : $د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٢$ حيث
س ∈ [٢، ٥] وكانت : $د(س) \geq ا$ فإن : ا = ...
(أ) -٢ (ب) ٢ (جـ) ٠ (د) ٥٢

44 في الشكل المقابل :
ا ∈ للمستقيم س + ٣ص = ٦
فإن أكبر مساحة للمثلث المتساوي الساقين أ ب و = ... وحدة مربعة

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

إذا كانت الدالة د : ح ← ح
حيث : $د(س) = -٢س + ٦$
فإن جميع العبارات الآتية صحيحة ماعدا .....
45
(أ) منحنى الدالة د يكون محدبًا لأعلى في ح
(ب) الدالة د لها قيمة صغرى محلية عند س = ٣
(جـ) منحنى الدالة د ليس له نقط انقلاب
(د) الدالة د تناقصية في الفترة]٣، ∞[

46 منحنى الدالة د : $د(س) = (س + ٢)(س - ١)^٢$
يتزايد في الفترة .....
(أ)]-∞، -١[(ب)]١، ∞[
(جـ)]-١، ١[(د) ح - [-١، ١]

47 في الشكل المقابل :

ء ∈ لمنحنى الدالة $د(س) = هـ^{س}$
فإن الإحداثي السيني للنقطة ء الذي تجعل مساحة سطح المستطيل أ ب جـ ء أكبر ما يمكن هو ....
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

48 إذا كان د(س) = (س − ٣)(س + ٢) فإن منحنى الدالة د يكون محدبًا لأعلى في الفترة .....

(أ)]−∞، −½[(ب)]−٢، ٣[

(جـ)]½، ∞[(د)]−∞، ٣[

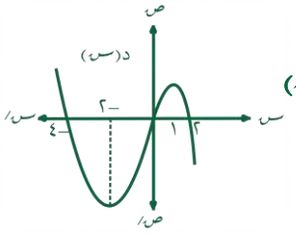
49 إذا كانت د :]١، ٤] ← ح، د(س) = أ س² + ب/س

وكانت د(س) < ٠ لكل س ∈]١، ٤[، وكان للمنحنى قيمة صغرى مطلقة تساوي ٣ وقيمة عظمى مطلقة تساوي ٥ فإن .....

(أ) أ = ١/٩ ، ب = ٤٤/٩ (ب) أ = ١، ب = ٤٤

(جـ) أ = ١٧/٦٣ ، ب = ١٧٢/٦٣ (د) أ = ١٧، ب = ١٧٢

50 الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د(س) فإن كل العبارات الآتية صحيحة ماعدا .....

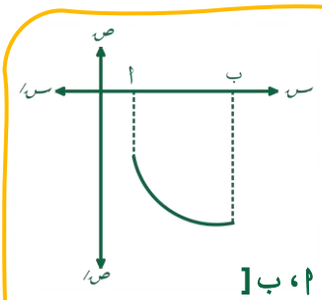


(أ) د(−٢) = ٠ (ب) د(−١) > ٠

(جـ) د(٣) > د(٥) (د) د(−٤) < د(−٥)

51 الشكل المقابل يوضح منحنى دالة د مجالها [أ، ب] فإن الدالة ر :

ر(س) = س د(س)

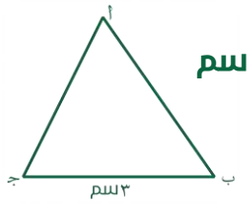


تكون ..... في الفترة]أ، ب[

(أ) متناقصة (ب) متزايدة

(جـ) ثابتة (د) لا يمكن تحديد اطرادها

52 في الشكل المقابل :



إذا كان محيط المثلث = ٨ سم

فإن أكبر مساحة لهذا المثلث = ... سم²

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

53 إذا كانت د : ح ← ح حيث

د(س) = ∛(س²) × (٣س − ٧) تزايدية لكل س ∈]−∞، أ[، س ∈]ب، ∞[

فإن : ٧أ + ١٥ ب = ...

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٢١ (د) ٢٢

54 إذا كانت د دالة حيث : د(س) = س/لو_هـ س

فإن القيمة الصغرى المحلية للدالة د تساوي .....

(أ) هـ (ب) ١/هـ (جـ) لو_هـ هـ (د) −هـ

55 منحنى الدالة د : د(س) = ∛(س − ٣)²

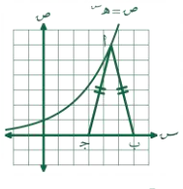
محدب لأعلى عندما س ∈ .....

(أ)]−∞، ٣[(ب)]٣، ∞[

(جـ) ح − {٣} (د) ح

ثانيًا : أهم الأسئلة المقالية

56 في الشكل المقابل :



إذا كان ب و = ٦ سم ،

فأوجد طول وجـ الذي يجعل مساحة سطح Δ أ ب جـ أكبر ما يمكن

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

57 علبة على هيئة متوازي مستطيلات ، قاعدتها مربعة الشكل. إذا كان مجموع جميع أحرفها يساوي ٢٤٠ سم فأوجد أبعادها حتى يصير حجمها أكبر مايمكن

58 أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٥ ، ٠) وتقع على المنحنى $ص = \frac{١}{٢} س^{٢} - ٤$

59 ملعب على شكل مستطيل ينتهي بنصفى دائرتين ، إذا كان محيط الملعب ٤٢٠ مترًا ، فأوجد أكبر مساحة له

60 قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل بعداه ١٥ سم ، ٢٤ سم ، قطع من أركانها الأربعة مربعات متطابقة طول ضلع كل منها $س$ سم ثم ثُنيت الأجزاء البارزة لأعلى لتكون علبة بدون غطاء ، احسب أبعاد العلبة عندما يكون لها أكبر حجم ممكن

61 أوجد أقصر بعد بين المستقيم $س - ٢ص - ١٠ = ٠$ والمنحنى $ص^{٢} = ٤س$

62 جدار ارتفاعه ٢ متر ويبعد مترين عن أحد المنازل ، أوجد طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل مرتكزًا على الجدار

63 أوجد بعدى مستطيل له أكبر مساحة يمكن رسمه داخل مثلث ، طول قاعدته ١٦ سم وارتفاعه ١٢ سم ، بحيث ينطبق بأحد أضلاعه على قاعدة المثلث ويقع رأسا الضلع المقابل على الضلعين الآخرين للمثلث

64 أوجد أ ، ب بحيث يكون للمنحنى $س^{٢} ص + أ ص + ب س^{٢} = ٠$ نقطة انقلاب عند النقطة (١ ، −١)

65 إذا كانت الدالة د : $د(س) = أ س^{٣} - س^{٢} + ٤$ لها نقطة انقلاب عند $س = \frac{٢}{٣}$ فأوجد القيم المحلية للدالة د (إن وجدت)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

سابقًا: ملخص التكامل الغير محدد

أولًا: قواعد التكامل

الدالة	تكاملها
$\int ا \, و(س) \, ه س$	$ا س + ث$
$\int س^{ن} \, و(س) \, ه س$	$\frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث$ حيث : $ن \neq -1$ (شرط)
$\int هـ^{س} \, و(س) \, ه س$	$هـ^{س} + ث$
$\int هـ^{ا س+ب} \, و(س) \, ه س$	$\frac{1}{ا} هـ^{ا س+ب} + ث$
$\int هـ^{د(س)} \, د'(س) \, و(س) \, ه س$	$هـ^{د(س)} + ث$ القاعدة العامة
$\int هـ^{س} [د(س) + د'(س)] \, و(س) \, ه س$	$هـ^{س} د(س) + ث$ القاعدة العامة
$\int \frac{ا}{ب^{س}} \, و(س) \, ه س$	$\frac{ا}{ب هـ^{و ا}} \quad س \quad ا + ث$
$\int \frac{د'(س)}{د(س)} \, و(س) \, ه س$	$لو_{هـ} \, ا \, د(س) \, ا + ث$
$\int د'(س) [د(س)]^{ن} \, و(س) \, ه س$	$\frac{[د(س)]^{ن+1}}{ن+1} + ث$ حيث : $ن \neq -1$ (شرط)

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

تابع قواعد التكامل (المثلثية)

الدالـــة	تكاملهـــا
• ∫جا(أس + ب) ءس • أ َ(س) جاد(س) ءس	• $\frac{-1}{أ}$ جتا(أس + ب) + ث • −جتاد(س) + ث
• ∫جتا(أس + ب) ءس • أ َ(س) جتاد(س) ءس	• $\frac{1}{أ}$ جا(أس + ب) + ث • جاد(س) + ث
• ∫قا²(أس + ب) ءس • أ َ(س) قا²د(س) ءس	• $\frac{1}{أ}$ ظا(أس + ب) + ث • ظاد(س) + ث
• ∫قتا²(أس + ب) ءس • أ َ(س) قتا²د(س) ءس	• $\frac{-1}{أ}$ ظتا(أس + ب) + ث • −ظتاد(س) + ث
• ∫قا(أس + ب) ظا(أس + ب) ءس • أ َ(س) قاد(س) ظاد(س) ءس	• $\frac{1}{أ}$ قا(أس + ب) + ث • قاد(س) + ث
• ∫قتا(أس + ب) ظتا(أس + ب) ءس • أ َ(س) قتاد(س) ظتاد(س) ءس	• $\frac{-1}{أ}$ قتا(أس + ب) + ث • −قتاد(س) + ث
• ∫قا(أس + ب) ءس	$\frac{-1}{أ}$ لـو|قا(أس + ب) + ظا(أس + ب)| + ث
• ∫قتا(أس + ب) ءس	$\frac{-1}{أ}$ لـو|قتا(أس + ب) + ظتا(أس + ب)| + ث
• ∫ظا(أس + ب) ءس	$\frac{-1}{أ}$ لـو|جتا(أس + ب)| + ث $\frac{1}{أ}$ لـو|قا(أس + ب)| + ث
• ∫ظتا(أس + ب) ءس	$\frac{1}{أ}$ لـو|جا(أس + ب)| + ث $\frac{-1}{أ}$ لـو|قتا(أس + ب)| + ث

لاحظ :
علشان نكامل الأسية الغير طبيعية اعتبرها طبيعية وبعد ما تخلص اقسم على LN الأساس

- المقياس منعرفش نكامله غير تكامل محدد

∫ [د(س) × ر َ(س) + ر(س) × د َ(س)] ءس = د(س) × ر(س) + ث

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK

ثانيًا : خواص التكامل

- $\int أ\, د(س)\, ود س = أ \int د(س)\, ود س$ ، $أ \neq 0$: أ ثابت

(أي رقم اقدر ارميه بره التكامل بشرط يكون مضروب في الدالة اللي بكاملها)

- $\int [د(س) \pm ر(س)]\, ود س = \int د(س)\, ود س \pm ر(س)\, ود س$

(التكامل يوزع جمع وطرح) لا يوزع ضرب وقسمة ياتيس !

- $\frac{ء}{ود س} \int د(س)\, ود س = د(س)$

خد بالك !
من الفرق بين دول

- $\int \frac{ء}{ود س} د(س)\, ود س = د(س) + ث$

- $\int د(س)\, ود س - \int د(س)\, ود س$ = ثابت (وليس بالضرورة صفر)

- التكامل لا يوزع في الضرب والقسمة ومينفعش نطلع متغير برا علامة التكامل.

- إذا كان : $\int د(س)\, ود س = ر(س) + ث$ فإن : $\frac{ء}{ود س}[ر(س) + ث)] = د(س)$

أي أن : $د(س) = ر'(س)$

لاحظ : حاجات مينفعش تعملها وانت بتكامل :

1) ماتطلعش متغير بره علامة التكامل
2) متوزعش التكامل ضرب أو قسمة
3) متكاملش حاجة إلا وهي خاضعة لقاعدة

مثلًا : $\int جا^{٢}س\, ود س \neq \frac{١}{٣} جا^{٣}س + ث$

لأن مشتقة ما بداخل القوس مش موجودة فـ مينفعش احلها كدة لازم تكون على الصورة

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

ثالثا : طرق التكامل

أولًا : التكامل بالتعويض :

غالبا يُستخدم في حل تكاملات القوس اللي مش عارفين نكاملها على انها قوس أو الكسور اللي مش عارفين نكاملها بقاعدة الكسر (بالقاعدة الأساسية) :

(1) نضع ما بداخل القوس = ص (أو أي متغير آخر) [أو المقام = ص]

(2) نجيب المتغير القديم بدلالة الجديد

(3) نجيب التفاضلي (تشتق كل متغير بالنسبة لنفسه)

(4) نعوض ونحـــــل

لاحظ ؟

يمكن استخدام التعويض للتخلص من الأقواس :

ص = ما بداخل القوس (ص = القوس كله)

ثانيًا : التكامل بالتجزيئ :

يُستخدم إذا كان التكامل في شكل حاصل ضرب دالتين نفاضل أحدهما ونكامل الآخر :

نفاضلها [ص ← د ص ، د ع ← ع] نكاملها ← ت = ص ع − ∫ ع د ص

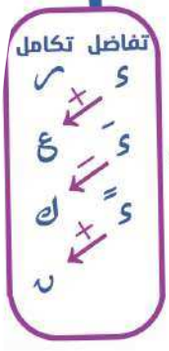
ملاحظات على التجزيئ :

(1) نختار اللوغاريتم في التجزيئ دايمًا تفاضل

(2) مسألة التجزيئ عبارة عن مسألتين تكامل جوا بعض
(تخلص لما كل التكاملات تتحل)

(3) اشبط واتشعبط دايما إنك تفاضل كثيرة حدود إلا في اللوغاريتمات متشبطش ولا تتشعبط
(طلما بتعرف تكامل المضروبه فيها)

(4) استخدام طريقة العمود لو الدالة اللي بشتقها هتوصل للصفر
(بشرط إنك بتعرف تكامل التانية طول الوقت)



(5) خد بالك من التكامل الدوار زي :

هـ^س جا س د س ، بتفضل تلف لحد ما ترجع لشكل التكامل الأصلي

هـ^س جتا س د س

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

رابعًا : ملاحظاااات

- ∫د (س) وس ← تكامل متغير بالنسبة لنفسه

∫ص وَ (س) ← لا يمكن إلا إذا كانت ص = د (س) أو ص ثابتة

- ∫د (س) وَ(س) ← ت (س) + ث

فإن ت (س) تسمى المشتقة العكسية للدالة د (المشتقة العكسية لـ د يعني تكامل د)

يعني (1) لما نكامل د تطلع ت (2) لما نشتق ت ترجع د

- في المعادلة التكاملية (معادلة طرفها تكاملين) :

∫ⓧ وَ ⓧ = ∫ ⓨ وَ ⓨ يوضع فيها الثابت في طرف واحد

- مسألة التكامل لو فيها تبسيط بسط (أمر) لأنها مش هتتحل غير كدا التبسيط يشمل :

قواعد الأسس / قواعد اللوغاريتمة / قواعد الدوال المثلثية / التحليل (فرق بين مربعين - مكعبين) / العامل المشترك / توزيع البسط على المقام / القسمة المطولة .....

- ∫د (س) وَ(٢ س) ← معناها نكامل دالة س بالنسبة الى ٢س

وهنا كل ٢س تكاملها بـ $\frac{١}{٢}$ (٢س)^{٢} أي : ٢س^{٢}

- وَ ⓧ = ⓧ وَس والأمثلة عليها :

وَ (س^{٢}) = ٢س وس ، وَ (قاس) = قاس ظاس وس

- لو عملنا للأقواس تجزيئ هيطلع ناتج مختلف عن التعويض شكلًا لكن الاثنين صح

• د(س) = ∫د(س) وس ، د(س) = ∫د(س) وس وهكذا .....

• لو كانت المشتقة الأولى دالة في س ، ص

عشان نجيب الدالة الأصلية لازم نفصل المتغيرات [د(ص) وص = د(س) وس] ثم نكامل الطرفين

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG. AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ثامنًا : التكامل المحدد

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] وكانت ت أي مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة فإن : $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ودس = ت(ب) - ت(أ)$

خطوات حساب التكامل المحدد

- تكامل الدالة عادي جدًا بأي قاعدة أو أي طريقة (بس منحطش ثابت تكامل)
  - لأن كده كده هيطير بعد التعويض
- نعوض بحدود التكامل في الدالة الناتجة (فوق - تحت) ، (العلوي - السفلي)

ملاحظات على حسابه

- إذا استخدمنا التكامل بالتعويض :
  - متنساش تغير الحدود بتاعت التكامل للمتغير الجديد
- إذا استخدمنا التكامل التجزيئ :
  - متحطش الحدود إلا بعد ما تخلص التكامل خالص
- شرط حسابه :
  - إن الدالة اللي بنكاملها تكون متصلة على الفترة اللي بنكاملها فيها ، ولو مكانتش متصلة على الفترة دي فالتكامل المحدد لا يمكن إجراؤه

خواص التكامل المحدد

(1) إذا كانت د دالة متصلة على [أ ، ب] ، جـ ∈] أ ، ب [فـإن :

- $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ودس = -\int_{ب}^{أ} د(س)\,ودس$ (لو بدلت الحدود غير الإشارة)
- $\int_{أ}^{أ} د(س)\,ودس = ٠$
- $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ودس = \int_{أ}^{جـ} د(س)\,ودس + \int_{جـ}^{ب} د(س)\,ودس$

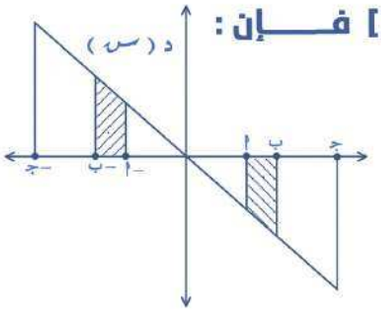
(التكامل المحدد = مجموع التكاملات)

لاحظ : شروط دمج تكاملين في تكامل واحد

- تكون اللي جوه نفس الدالة
- الإشارة بينهم موجبة (نفس المعاملات)
- يكون فيه رقم مشترك عامل قطر في التكاملين (زي جـ كده)

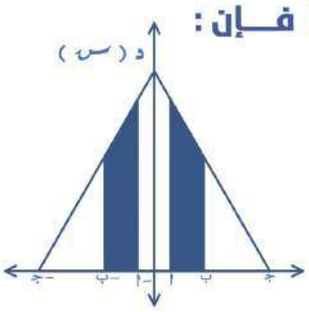
WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK

(2) إذا كانت د دالة فردية متصلة على الفترة [−جـ ، جـ] فـــإن :



- $\int_{-جـ}^{جـ} د(س)\,وس = ٠$
- $\int_{أ}^{ب} د(س)\,وس = -\int_{-ب}^{-أ} د(س)\,وس$ حيث أ ، ب ∈ ح$^+$

(3) إذا كانت د دالة زوجية متصلة على الفترة [−جـ ، جـ] فـــإن :



- $\int_{-جـ}^{جـ} د(س)\,وس = ٢\int_{٠}^{جـ} د(س)\,وس = ٢\int_{-جـ}^{٠} د(س)\,وس$
- $\int_{أ}^{ب} د(س)\,وس = \int_{-ب}^{-أ} د(س)\,وس$ حيث أ ، ب ∈ ح$^+$

(4) يوزع في الجمـــــع والطـــــرح

(5) الناتج منه رقم قد يكون : موجب / سالب / صفر

لاحظ :

- $\int د(س)\,وس - \int د(س)\,وس$ = ثـــــابت

  بينـــــما $\int_{أ}^{ب} د(س)\,وس - \int_{أ}^{ب} د(س)\,وس = ٠$

- $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}}\,وس = [\frac{١}{س}]_{١}^{٢} = -\frac{١}{٢} - (-١) = \frac{١}{٢}$ ✓

$\int_{-٢}^{٢} \frac{١}{س^{٢}}\,وس = [\frac{١}{س}]_{-٢}^{٢} = -\frac{١}{٢} - (\frac{١}{٢}) = -١$ ✗

لأ

وذلك لأن : د (س) = $\frac{١}{س^{٢}}$ غير متصلة عند س = ٠ ولذلك لا نستطيع إيجاد قيمة التكامل المحدد لهذه الدالة في فترة تحتوي على صفر ولتكن [−٢ ، ٢]

$\int_{-٢}^{٢} \frac{١}{س^{٢}}\,وس$ ..... لا يمكن إجراؤه أو لا نستطيع إيجاد قيمته ....

- لو عارف حدود التكامل والدالة اللي بتكاملها كده تقدر تحسب التكامل بالآلة غير كة حل بإيدك
- دالة المقياس لما تكاملهـــا لازم تعيد تعريفها
- الدالة المجزأة أو دالة المقياس لما تعملهم تكامل محدد لازم نقسم التكامل طبقًا لفترات تعريف الدالة

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

تاسعًا : المساحات في المستوى

مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات

(I) د (س) ≥ ٠ (المنطقة فوق محور س)

$$م = \int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫس$$

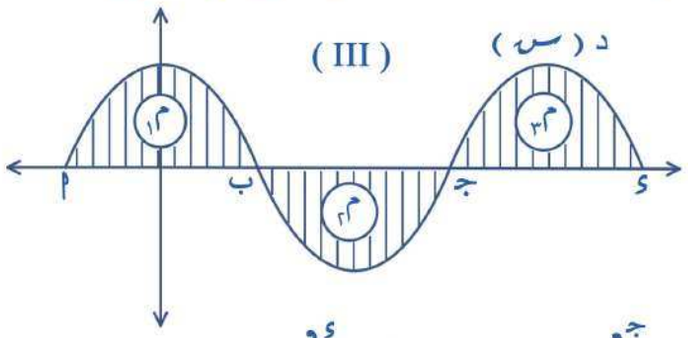
[المساحة هي التكامل]

(II) د (س) ≤ ٠ (المنطقة أسفل محور س)

$$م = -\int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫس = \left|\int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫس\right|$$

[المساحة = سالـــــب التكامل]

(III) د (س) ≤ ٠ في فترة (فترات) ، د (س) ≥ في فترة أو (فترات)



- $م_{١} = \int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫس$
- $م_{٢} = -\int_{ب}^{جـ} د(س)\,ﻫس$
- $م_{٣} = \int_{جـ}^{ء} د(س)\,ﻫس$
- $م_{١} + م_{٢} + م_{٣} = \int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫس - \int_{ب}^{جـ} د(س)\,ﻫس + \int_{جـ}^{ء} د(س)\,ﻫس$
- $\int_{أ}^{ء} د(س)\,ﻫس = \int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫس + \int_{ب}^{جـ} د(س)\,ﻫس + \int_{جـ}^{ء} د(س)\,ﻫس$

المساحة = مجموع المساحات ، التكامل = مجموع التكاملات

أولًا : خطوات إيجاد المســـاحـــة :

(1) نرسم الدوال المعطاه (مع إيجاد نقط التقاطع مع محور س)

(2) نظلل المنطقة المراد حساب مساحتها

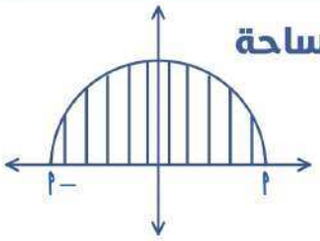
ملحوظة :

يُفضَّل الحل بالرسم ..... طب ولو معرفتش ترسم نوجد أصفار الدالة ونبحث إشارة ونرسمها كروكي

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

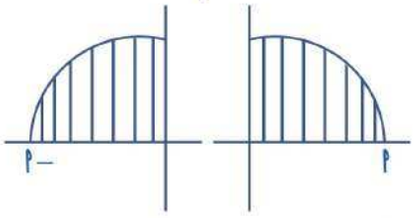
ثانيًا : التكامل الدائري

تطبيق على المساحات ، حساب التكامل باستخدام المساحة



$$\int_{-أ}^{أ} \pi \left[\sqrt{أ^2 - س^2}\right]^2 \, وس = \frac{1}{2} \pi أ^2$$

(نصف مساحة دائرة طول نصف قطرها أ)



$$\int_{0}^{أ} \pi \left[\sqrt{أ^2 - س^2}\right]^2 \, وس = \int_{-أ}^{أ} \pi \left[\sqrt{أ^2 - س^2}\right]^2 \, وس = \frac{1}{4} \pi أ^2$$

(ربع مساحة دائرة طول نصف قطرها أ)

لاحظ : $\int \left[\sqrt{أ^2 - س^2}\right]^2 \, وس$

(تعويض دوال مثلثية : نضع $س = أ$ جتاθ أو $س = أ$ جاθ)

اخيرًا : حجوم الأجسام الدورانية

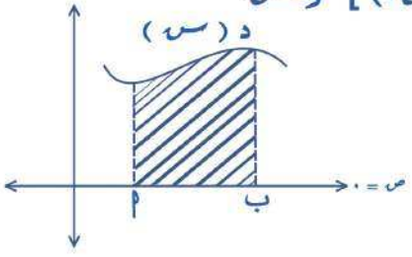
المجسم الدوراني

هو الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت يسمى محور الدوران (غالبًا حول محور س أو محور ص) ويكون له حجم

- الاسطوانة الدائرية القائمة : تنشأ من دوران مستطيل أبعاده نق ، ع
- المخروط الدائري القائم : ينشأ من دوران مثلث قائم ضلعي قائمته نق ، ع
- الكرة : تنشأ من دوران نصف الدائرة طول نصف قطرها نق

الدوران حول محور السينات

إذا دارت هذه المنطقة دورة كاملة حول محور س فإن حجم الجسم الناشئ :



$$ح = \int_{أ}^{ب} \pi \left[د(س)\right]^2 - (٠)^2 \, وس = \int_{أ}^{ب} \pi \left[د(س)\right]^2 \, وس$$

وبصفة عامة : $ح = \int_{أ}^{ب} \pi (ص_2^2 - ص_1^2) \, وس$

حيث : $ص_2$ هي الدالة الأعلى على ص ، $ص_1$ هي الدالة الأقل على ص ، $ص_1$ ، $ص_2$ دوال في س

لاحظ :

التكامل المحدد =
- مجموع التكامل = المساحة ، لو الدالة فوق
- المساحة ↑ − المساحة ↓ ، لو جزء فوق و جزء تحت
- − المساحة ، لو الدالة تحت

المساحة =
- مجموع المساحات = التكامل المحدد ، الدالة فوق − التكامل المحدد ، الدالة تحت
- التكامل فوق − التكامل تحت ، جزء فوق و جزء تحت

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

التكامل

أولًا : أهم أسئلة الاختيار من متعدد

1 إذا كان ميل المماس لمنحنى : ص = د (س) يعطى بالعلاقة : $\frac{ص}{س} = س هـ^{س}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٤) ، فإن د (١) = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢

2 $\int$ س لـو س س = ... + ث

(أ) $\frac{1}{4}$ س^{2} (لـو س^{2} − ١) (ب) $\frac{1}{4}$ س^{2} لـو س^{2} − ١

(جـ) $\frac{1}{4}$ س^{2} لـو س^{2} + ١ (د) $\frac{1}{2}$ س^{2} لـو س^{2} + $\frac{1}{4}$

3 $\int \frac{لـو\ س^{2}}{س\ لـو\ س^{3}}$ س س = ... + ث

(أ) $\frac{2}{3}$ لـو | س | (ب) $\frac{3}{2}$ لـو | س |

(جـ) $\frac{3}{2}$ س لـو | س | (د) $\frac{2}{3}$ س لـو | س |

4 $\int \frac{جتاس - جاس}{جاس + جتاس}$ س س = ... + ث

(أ) لـو | جاس + جتاس |

(ب) لـو | جاس − جتاس |

(جـ) لـو | جاس + جتاس |

(د) لـو | جاس − جتاس |

5 $\int \frac{1}{جتا^{2}س}$ هـ$^{1-ظاس}$ س س = ... + ث

(أ) هـ^{قاس} (ب) هـ$^{1-ظاس}$

(جـ) قا^{2}س هـ$^{1-ظاس}$ (د) − هـ$^{1-ظاس}$

6 $\int$ $\frac{لـو\ 2س}{س}$ س س = ... + ث

(أ) $\frac{1}{2}$ (لـو ٢س)^{2} (ب) لـو | لـو ٢س |

(جـ) $\frac{1}{2}$ س^{2} لـو ٢س − $\frac{1}{4}$ س^{2} (د) ٢ (لـو ٢س)^{2}

7 $\int \frac{2 جتاس - 3 جاس}{6 جتاس + 4 جاس}$ س س = ... + ث

(أ) لـو | ٦ جتاس + ٤ جاس |

(ب) ٢ لـو | ٦ جتاس + ٤ جاس |

(جـ) $\frac{1}{2}$ لـو | ٣ جتاس + ٢ جاس |

(د) $\frac{1}{2}$ لـو | ٢ جتاس + ٣ جاس |

8 مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنى الدالة : ص = هـ^{س} ومحور الصادات والمستقيم س = ٢ وفوق محور السينات تساوي ..... وحدة مساحة

(أ) هـ^{2} (ب) ٢ هـ (جـ) هـ^{2} − ١ (د) هـ^{2} − هـ

9 $\int \frac{7س^{2}}{5 - 4س^{3}}$ س س = ... + ث

(أ) $\frac{7}{12}$ لـو | ٤س^{3} − ٥ |

(ب) $\frac{12}{7}$ لـو | ٤س^{3} − ٥ |

(جـ) − $\frac{7}{12}$ لـو | ٤س^{3} − ٥ |

(د) − $\frac{12}{7}$ لـو | ٤س^{3} − ٥ |

WWW.JAWACADEMY.NET WWW.MRAHMEDESSAM.COM ENG/AHMED ESSAM ELDIN ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

26

10 حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى : ص = ٢ س − س^{٢} ، ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات = ... وحدة مكعبة

(أ) $\frac{\pi}{١٥}$ (ب) $\frac{١٦}{١٥}\pi$ (جـ) $\frac{٣١}{١٥}\pi$ (د) $\frac{٣٨}{١٥}\pi$

26

11 حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى : ص = $\sqrt{\text{س}}$ والمستقيمين : ص = ٠ ، س = ١ دورة كاملة حول محور السينات يساوي ..... وحدة مكعبة

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{١٠}\pi$ (د) $\frac{٧}{١٠}\pi$

26

12 إذا كانت : د (س) = أ (١ + جتا٢س) وس ،
د (π) = ٢π ، فإن د (−π) = ...

(أ) −١ (ب) ٠ (جـ) ١ (د) ٢

26

13 إذا كانت الدالة :

د (س) = { س^{٢} + ٤ ، س > ٢ ؛ ٣٠ − ١١ س ، س ≤ ٢ } متصلة على ح ،

فإن : أ$_{٠}^{٦}$ د (س) وس = ...

(أ) ١٣٦ (ب) ٦٨ (جـ) $-\frac{١٣٦}{٣}$ (د) −٦٨

26

14 حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د : د (س) = $\sqrt{٢}$ هـ^{س} والمستقيمين س = ٠ ، س = ١ دورة كاملة حول محور السينات يساوي ..... وحدة حجم

(أ) π (هـ^{٢} − ١) (ب) $\pi\sqrt{٢}$ (هـ − ١)
(جـ) $\sqrt{٢}$ (هـ^{٢} − ١) (د) $\sqrt{٢}$ (هـ − ١)

26

15 إذا كانت : د (س) دالة كثيرة حدود زوجية
وكان أ$_{-٣}^{٣}$ د (س) وس = ٦ ،
فإن أ$_{-٣}^{٣}$ [د (س) − ٦] وس = ...

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (جـ) −٢٤ (د) −١٢

16 أ $\frac{\text{س}^{٢}+٢}{\text{س}^{٣}+٦\text{س}+١}$ وس = ... + ث

(أ) ٣ لو$_{\text{هـ}}$ | س^{٣} + ٦س + ١ |
(ب) $-\frac{١}{٣}$ لو$_{\text{هـ}}$ | س^{٣} + ٦س + ١ |
(جـ) $\frac{١}{٣}$ لو$_{\text{هـ}}$ | س^{٣} + ٦س + ١ |
(د) −٣ لو$_{\text{هـ}}$ | س^{٣} + ٦س + ١ |

17 أ $\frac{٤\,\text{هـ}^{\text{س}}+\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}}{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}$ وس = ... + ث

(أ) هـ^{س} + $\frac{١}{٤}$ لو$_{\text{هـ}}$ | س | (ب) هـ^{س} + ٤ لو$_{\text{هـ}}$ | س |
(جـ) هـ^{س} − $\frac{١}{٤}$ لو$_{\text{هـ}}$ | س | (د) هـ^{س} − ٤ لو$_{\text{هـ}}$ | س |

18 أ $\frac{(١+\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٢}}{\text{س}}$ وس = ... + ث

(أ) ٣ (١ + لو$_{\text{هـ}}$ س)^{٣} (ب) $\frac{١}{٣}$ (١ + لو$_{\text{هـ}}$ س)^{٣}
(جـ) −٣ (١ + لو$_{\text{هـ}}$ س)^{٣} (د) $-\frac{١}{٣}$ (١ + لو$_{\text{هـ}}$ س)^{٣}

19 إذا كان
أ (٢س + ٣) لو$_{\text{هـ}}$ س وس = ص ع − أ ع وص
فإن : ص ع = ...

(أ) ٢س لو$_{\text{هـ}}$ س (ب) (٢س + ٣) لو$_{\text{هـ}}$ س
(جـ) $\frac{١}{٢}$ (٢س + ٣) لو$_{\text{هـ}}$ س (د) س (س + ٣) لو$_{\text{هـ}}$ س

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

20 إذا كان المنحنى يمر بالنقطة أ (٢ ، ٣) ، وميل العمودي عليه عند أي نقطة (س ، ص) هو ٣ − س فإن معادلة المنحنى : ص = ...

(أ) ل$_{و}$ | س − ٣ | + ٣ (ب) ل$_{و}$ | س − ٢ | + ٣

(ج) ل$_{و}$ | س − ٣ | + ٢ (د) ل$_{و}$ | س − ٢ | + ٢

21 إذا كانت د دالة فردية متصلة على الفترة [−٣ ، ٥] ، $\int_{٣}^{٥}$ د (س) ه س = ٩

فإن : $\int_{-٣}^{٥}$ د (س) ه س = ...

(أ) ٩ (ب) −٩ (ج) ٠ (د) ٥

22 إذا كانت د دالة زوجية متصلة على الفترة [−٤ ، ٤] ، $\int_{-٤}^{٤}$ د (س) ه س = ٢٠ ،

$\int_{٠}^{٢}$ د (س) ه س = ٦ ، فإن : $\int_{-٤}^{-٢}$ د (س) ه س = ...

(أ) ١٤ (ب) −١٤ (ج) ٢٠ (د) ٤

23 إذا كانت د (س) = | س | ،

فإن : $\int_{-٢}^{٢}$ د (س) ه س = ...

(أ) −١ (ب) ٠ (ج) ٢ (د) ٤

24 إذا كان $\int_{١}^{٥}$ د (س) ه س = ١٠ ،

$\int_{١}^{٥}$ ر (س) ه س = −٢ ،

فإن : $\int_{١}^{٥}$ [د (س) − ر (س)] ه س = ...

(أ) ١٢ (ب) ٨ (ج) ٦ (د) ١٨

25 إذا كانت د (س) = { ٢ عندما س < ٢ ، س عندما س ≥ ٢ }

فإن : $\int_{٠}^{٦}$ د (س) ه س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٢٤ (ج) ٢٠ (د) ١٨

26 حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{س + ٤}$ والمستقيمات س = ٠ ، س = ٥ ، ص = ٠ دورة كاملة حول محور السينات يساوي ..... π وحدة حجم

(أ) $\frac{٦٤}{٣}$ (ب) $\frac{٦٥}{٢}$ (ج) ١٦ (د) $\frac{٣٨}{٣}$

27 حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\frac{١}{س}$ والمستقيمات س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠ دورة كاملة حول محور السينات يساوي ..... وحدة حجم

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (ج) $\frac{\pi ٣}{٤}$ (د) π

28 $\int \frac{٧}{س ل_{و} ٣}$ ه س = ... + ث

(أ) ٧ ل$_{و}$ ٣ ل$_{و}$ | س | (ب) ٧ ل$_{و}$ | س |

(ج) $\frac{١}{٧}$ (ل$_{و}$ | س |) ل$_{و}$ ٣ (د) $\frac{١}{٧}$ ل$_{و}$ | س |

29 إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة (س ، ص) يساوي $\frac{٣ س + ٢}{س}$ ، وكان د (هـ) = ٣ هـ + ٥ ، فإن معادلة المنحنى هي : ص = ...

(أ) ٣ س + ٣ ل$_{و}$ | س | + ٣

(ب) ٣ س + ٣ ل$_{و}$ | س | + ٥

(ج) ٣ س + ٢ ل$_{و}$ | س | + ٣

(د) ٣ س + ٢ ل$_{و}$ | س | + ٥

30 إذا كانت د دالة متصلة على مجالها ح ،

$\int_{١}^{٦}$ د (س) ه س = ٦ ، $\int_{١}^{٧}$ د (س) ه س = ١٣ ،

فإن : $\int_{١}^{٧}$ د (س) ه س = ...

(أ) −١٤ (ب) −٧ (ج) ٧ (د) ١٤

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

26 $\int \frac{\text{جتا}(\text{لو}_{10} س)}{س} \, ص س = \ldots\ldots + ث$

31 (أ) جا $(\text{لو}_{10} س)$ (ب) $-$ جتا $(\text{لو}_{10} س)$

(جـ) جتا $(\text{لو}_{10} س)$ (د) $-$ جا $(\text{لو}_{10} س)$

26 إذا كان :

$\int (\text{لو}_{10} س) \, ص س = ا س \, \text{لو}_{10} س + ب س + ث$

32 فإن : $ا + ب = \ldots\ldots$

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) -١ (د) ٢

25 إذا كان :

$\int س \, \text{جتا} س \, ص س = ا س \, \text{جا} س + ب \, \text{جتا} س + ث$

33 فإن : $ا + ب = \ldots\ldots$

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٢

25 إذا كان :

$\int س^{٢} هـ^{س} \, ص س = (ا س^{٢} + ب س + جـ) هـ^{س} + ث$

34 فإن : $ا + ب + جـ = \ldots\ldots$

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) ٠ (د) ١

25 $\int \frac{\text{لو}_{10} س}{\sqrt{س}} \, ص س = \ldots\ldots + ث$

35 (أ) $٢\sqrt{س}$ $(\text{لو}_{10} س)$ (ب) $\sqrt{س}$ $(\text{لو}_{10} س) + \sqrt{س}$

(جـ) $٢\sqrt{س}$ $\text{لو}_{10} س + ٤ س$ (د) $٢\sqrt{س}$ $(\text{لو}_{10} س - ٢)$

25 $\int \frac{س + ٢}{س + ١} \, ص س = \ldots\ldots + ث$

36 (أ) $س - \text{لو}|س + ١|$ (ب) $س + \text{لو}|س + ١|$

(جـ) $س - \text{لو}|س + ١|$ (د) $س + \text{لو}|س + ١|$

25 $\int س^{٢} \, \text{لو}_{10} س^{٢} \, ص س = \ldots\ldots$

37 (أ) $\frac{١}{٣} س^{٣} \, \text{لو}_{10} س^{٢} - \frac{٢}{٩} س^{٣}$

(ب) $\frac{٢}{٩} س^{٣} \, \text{لو}_{10} س^{٢} - \frac{١}{٣} س^{٣}$

(جـ) $\frac{٢}{٣} س^{٢} \, \text{لو}_{10} س - \frac{١}{٣} س^{٣}$

(د) $\frac{٢}{٩} س^{٣} \, \text{لو}_{10} س - \frac{٢}{٩} س^{٣}$

25 إذا كان ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة عليه $(س ، ص)$ يساوي $\frac{\text{لو}_{10} س}{س}$ ، وكان المنحنى يمر بالنقطة $(هـ^{٢} ، ٣)$ ، فإن معادلة المنحنى هي .....

38 (أ) $ص = \frac{١}{٢} \text{لو}_{10} س + ٢$ (ب) $ص = \text{لو}_{10} س + ١$

(جـ) $ص = ٢ \, \text{لو}_{10} س - ١$ (د) $ص = \frac{١}{٢} (\text{لو}_{10} س)^{٢} + ١$

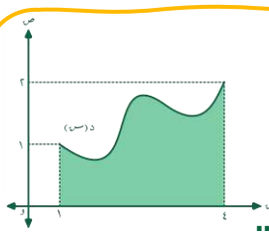
25 $\int \frac{\text{لو}_{١٠} \sqrt{س}}{٢ س} \, ص س = \ldots\ldots$

أي التكاملات الآتية يتم الحصول عليها بإجراء التعويض $ع = \sqrt{س}$

39 (أ) $\int \text{لو}_{10} ع \, ص ع$ (ب) $\int ٢ \, \text{لو}_{10} ع \, ص ع$

(جـ) $\int ٤ \, \text{لو}_{10} ع \, ص ع$ (د) $\int \frac{١}{٢} \text{لو}_{10} ع \, ص ع$

25 في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة المنطقة المظللة = ٥ وحدة مربعة

40 فإن : $\int_{١}^{٤} د(س) \, ص س = \ldots\ldots$

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

25 $\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{س}}}$ د س = ... + ث

(أ) $\frac{2}{5}(1+\sqrt{س})^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}(1+\sqrt{س})^{\frac{3}{2}}$

(ب) $\frac{4}{5}(1+\sqrt{س})^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(1+\sqrt{س})^{\frac{3}{2}}$

(ج) $\frac{4}{5}(1+\sqrt{س})^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(1+\sqrt{س})^{\frac{3}{2}}$

(د) $\frac{4}{5}(1+\sqrt{س})^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(1+\sqrt{س})^{\frac{1}{2}}$

26 إذا كان : س ص$'$ = ٣ + ص وكانت س = ١ عندما ص = −٢ ، فإن .....

42

(أ) | ص | = | س + ٣ |

(ب) | س | = | ص + ٣ |

(ج) | ص + ٢س | = ٠

(د) | ص + س | = ١

25 $\int \frac{د س}{هـ^{-س}+1}$ = ... + ث

43

(أ) لو$_{هـ}$ (هـ$^{-س}$ + ١)

(ب) س

(ج) لو$_{هـ}$ (هـ^{س} + ١)

(د) − لو$_{هـ}$ (هـ$^{-س}$ + ١)

26 إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى دالة عند أي نقطة عليه هو (٦س − ٣) وكان المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٢) والمماس له عند س = ١ أفقي ، فإن معادلة المنحنى هي ص = ...

44

(أ) س^{٣} − ٣س^{٢}

(ب) س^{٣} − $\frac{3}{2}$س^{٢} + ٢

(ج) س^{٣} − $\frac{3}{2}$س^{٢}

(د) س^{٣} + $\frac{3}{2}$س^{٢}

26 إذا كان د (٢) = ٢ ، د (٣) = ١ ،

$\int_{٢}^{٣}$ (س^{٢} د$'$ (س) + ٢س د (س)) د س = ك − ٥

45 فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٧

26 إذا كانت : ص = د (س) ، وكانت :

46 $\frac{د ص}{د س}$ − ٤ س^{٣} = ٢ س + ٣ ، د (١) = ١

فإن د (−١) = ...

(أ) −٥ (ب) −١ (ج) ١ (د) ٣

26 إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي $\frac{1}{ص\sqrt{س}}$ ،

47 وكان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢) ، فإن معادلته هي .....

(أ) ٤ س^{٢} = $\sqrt{ص}$

(ب) ٤ ص^{٢} = $\sqrt{س}$

(ج) س = ٤$\sqrt{ص}$

(د) ص^{٢} = ٤$\sqrt{س}$

26 إذا كان : $\frac{د ص}{د س}$ = هـ$^{٢س-ص}$ وكان منحنى الدالة ص = د (س) يمر بنقطة الأصل فإن : .....

48

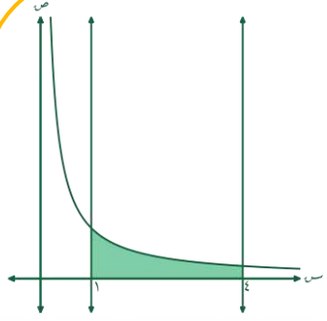
(أ) ص = لو$_{هـ}$ (١ + هـ^{٢س}) − لو$_{هـ}$ ٢

(ب) ص = ٢ س

(ج) ص = لو$_{هـ}$ (٢س + ١)

(د) ص = هـ^{٢س} − ١

26 إذا كان الشكل المقابل يمثل جزء من الشكل البياني للدالة د : د (س) = $\frac{1}{س^{2}}$ ،



49 فإن معادلة المستقيم الرأسي الذي يقسم المنطقة المظللة والمحصورة بين المنحنى وفوق محور السينات وبين المستقيمين س = ١ ، س = ٤ إلى جزئين متساويين في المساحة هي س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) $\frac{8}{5}$ (د) $\frac{6}{5}$

ENG . AHMED ESSAM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

50 إذا كان :
$٢ س د(س) + س^{٢} د'(س) = ٤ س^{٣} + ٤ س$ ،
حيث $س \in ح^{*}$ ، وكان $د(١) = ٧$ ،
فإن $د(٢) =$ .....
(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٩

51 إذا كان : $ص = د(س)$ متصلة على $[١ ، ٣]$
وكان : $\int_{١}^{٣} [د(س) + ١] ؤس = -٥$ ،
فإن : $\int_{١}^{٣} [د(س) + ٢] ؤس =$ .....
(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) -٣ (د) -٥

52 $\int \frac{هـ^{-س} - ١}{هـ^{-س} + س} ؤس =$ ..... $+ ث$
(أ) $لو | هـ^{-س} + س |$ (ب) $- لو | هـ^{-س} + س |$
(جـ) $لو | هـ^{س} |$ (د) $لو | س |$

53 إذا كان : $ص = د(س)$ حيث $ص = قا \theta$ ،
$س = جتا \theta$ ، فإن مساحة المنطقة المحصورة
بين المنحنى ومحور السينات والمستقيمين
$س = ١ ، س = هـ$ تساوي ..... وحدة مربعة
(أ) ٣ (ب) هـ (جـ) $هـ^{٢}$ (د) ١

54 إذا كانت د دالة فردية متصلة
$\int_{-٥}^{٢} د(س) ؤس - \int_{-٥}^{٢} د(س) ؤس - \int_{-٧}^{٥} د(س) ؤس = ك$ ، فإن : $\int_{٥}^{٧} ٢ د(س) ؤس =$ .....
(أ) ك (ب) $-ك$ (جـ) $\frac{١}{٢} ك$ (د) ٢ ك

55 $\int \frac{٢ س جتا س^{٢}}{جا س^{٢}} ؤس =$ ..... $+ ث$
(أ) $لو | جا س^{٢} |$ (ب) $- لو | جا س^{٢} |$
(جـ) $لو | جتا س^{٢} |$ (د) $- لو | جتا س^{٢} |$

56 $\int \frac{ظا س}{قا^{٢} س - ٢} ؤس =$ ..... $+ ث$
(أ) $لو | قا^{٢} س - ٢ |$ (ب) $\frac{١}{٤} لو | جتا س |$
(جـ) $\frac{١}{٤} لو | جتا ٢ س |$ (د) $لو | ظا س |$

57 $\int هـ^{س} جتا س جا س ؤس =$ ..... $+ ث$
(أ) $\frac{١}{٥} هـ^{س} (جا ٢س - ٢ جتا ٢س)$
(ب) $\frac{١}{١٠} هـ^{س} (جا ٢س - ٢ جتا ٢س)$
(جـ) $\frac{١}{٥} هـ^{س} (٢ جا ٢س - ٢ جتا ٢س)$
(د) $\frac{١}{١٠} هـ^{س} (٢جا ٢س - ٢ جتا ٢س)$

58 حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة
المحصورة بالمنحنى $ص = \sqrt{أ س + ب}$ ،
المستقيمات $س = ٠ ، س = أ ، ص = ٠$ دورة كاملة
حول محور السينات يساوي ..... وحدة مكعبة
(حيث أ ، ب ثابتان موجبان)
(أ) $\pi (أ^{٢} + أ ب)$ (ب) $\pi (\frac{٣}{٢} أ^{٢} + أ ب)$
(جـ) $\pi (أ + ب)$ (د) $\pi (أ^{٢} + ب)$

59 $\int \frac{ظا^{٣} س + ظا س}{ظا^{٢} س + ٣} ؤس =$ ..... $+ ث$
(أ) $لو (ظا^{٢} س + ٣)$ (ب) $لو (قا^{٢} س + ٢)$
(جـ) $\frac{١}{٢} لو | ظا س + ٣ |$ (د) $\frac{١}{٢} لو (قا^{٢} س + ٢)$

60 إذا كانت د دالة زوجية متصلة في الفترة
$[-٢٥ + ٣ ، ٧]$ وكان : $\int_{-٥}^{١} د(س) ؤس = ٨$ ،
$\int_{-٥}^{-١} د(س) ؤس = ٤$ ، فإن : $\int_{-٥}^{١} د(س) ؤس =$ .....
(أ) ٢٢ (ب) ٢٠ (جـ) ١٩ (د) ١٧

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

26

61 مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى : هـ^ص = س
ومحور السينات والمستقيمين س = هـ ، س = هـ^٢
تساوي ..... وحدة مربعة

(أ) هـ (ب) ٢هـ (جـ) هـ^٢ (د) ٢هـ^٢

62 المساحة المحصورة بين منحنى الدالة
د : د (س) = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ ومحور السينات = ...
وحدة مساحة

(أ) ٤π (ب) ٥π (جـ) ٦π (د) ٨π

63 إذا كان ميل العمودي على المنحنى :
ص = د (س) عند أي نقطة عليه هو
(٢ ص + ١) ظتا س علمًا بأن المنحنى يمر بنقطة
الأصل ، فإن معادلة هذا المنحنى هي .....

(أ) ص^٢ + ص = جا س
(ب) ص^٢ + ص = جتا س − ١
(جـ) ص^٢ + ص ظا س قا س = ٠
(د) ص^٢ + ص = ٣ جا^٢ س

64 إذا كان ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة عليه
هو هـ^٢ لو^هـ جا س − ٩ لو^٣ جتا س ، فإن معادلته هي
ص = ... علمًا بأنه يمر بالنقطة (π/٢ ، ١)

(أ) −١/٢ جتا ٢س + ١ (ب) −١/٢ جتا ٢س − ١
(جـ) −١/٢ جا ٢س + ١ (د) −١/٢ جا ٢س − ١

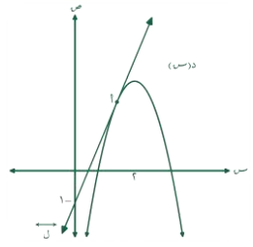
65 ∫ س^٣ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ د س = ... + ث

(أ) (٤ − س^٢)^٢ − (٤ − س^٢)^٣
(ب) ١/٥ (٤ − س^٢)^٥/٢ − ٤/٣ (٤ − س^٢)^٣/٢
(جـ) ١/٣ (٤ − س^٢)^٣/٢ − ١/٥ (٤ − س^٢)^٥/٢
(د) ١/٣ (٤ − س^٢)^٥/٢ − ١/٥ (٤ − س^٢)^٣/٢

66 إذا كان : ∫_١^٣ د (٢س + ٣) د س = ١٥ ، فإن : .....

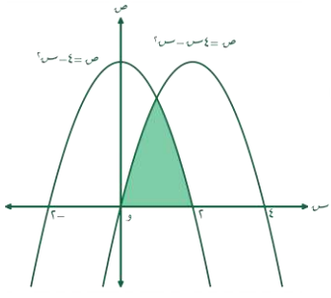
(أ) ∫_٢^٣ د (ص) د ص = ١٥ (ب) ∫_٢^٣ د (ص) د ص = ٣٠
(جـ) ∫_٧^٩ د (ص) د ص = ١٥ (د) ∫_٧^٩ د (ص) د ص = ٣٠

67 في الشكل المقابل :
المستقيم ل يمس
منحنى الدالة د
عند أ (١ ، ١) فإن :
١/٢ ∫_١^٢ هـ^س [د(س) + د'(س)] د س = ...



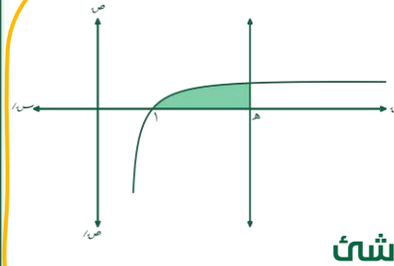
(أ) −هـ^٢ (ب) هـ^٢ (جـ) هـ (د) −هـ

68 في الشكل المقابل :
مساحة الجزء المظلل
= ..... وحدة مربعة



(أ) ٢ (ب) ٧/٣
(جـ) ٣ (د) ١٠/٣

69 الشكل المقابل
يمثل منحنى الدالة :
د (س) = لو^هـ س / $\sqrt{س}$
والمستقيم س = هـ
فإن حجم الجسم الناشئ
من دوران المنطقة المظللة
دورة كاملة حول محور
السينات = ... وحدة مكعبة



(أ) π (ب) ٢π (جـ) π/٣ (د) π/٦

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ثانيًا : أهم الأسئلة المقالية

70 $\int_{1}^{2} (س^{2} + 5) \sqrt{س - 1}$ د س

71 إذا كان معدل التغير في مساحة سطح صفيحة م (بالسنتيمتر المربع) بالنسبة للزمن ن (بالثانية) يتعين بالعلاقة $\frac{د م}{د ن} = هـ^{-0,1 ن}$ وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوي ٨٠ سم^{2} ، أوجد مساحة سطح الصفيحة بعد ١٠ ثوانٍ

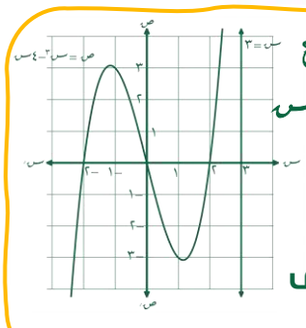
72 أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان : $\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = ا س + ب$ حيث ا ، ب ثابتان وللمنحنى نقطة انقلاب عند النقطة (٢ ، ٠) وقيمة صغرى محلية عند النقطة (١ ، ٠) ثم أوجد القيمة العظمى المحلية لهذا المنحنى

73 أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د : د (س) = $\sqrt[3]{2 س + 2}$ والمستقيم س = ٣ وفوق محور السينات

74 $\int_{-3}^{3} |س^{2} - 4|$ د س

75 صمم مهندس مدخل فندق على شكل قوس معادلته ص = $-\frac{1}{2}$ (س − ١) (س − ٧) حيث س بالأمتار فإذا غُطى هذا المدخل بزجاج تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥٠٠ جنيه كم تكون تكلفة الزجاج

76 إذا كانت د :] − ∞ ، ٣] ← ح حيث : د (س) = س^{3} − ٤ س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات وتقع أعلى محور السينات



77 أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى : $\frac{س^{2}}{ا^{2}} + \frac{ص^{2}}{ب^{2}} = 1$ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات حيث ا ، ب ثابتان .

ENG . AHMED ESSAM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

Outline
لأهم النقاط في الفراغية

* لإيجاد معيار متجه :
  - مجموع مربعات مركباته
  - المتجه • نفسه

* لإيجاد $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$
  - $||\vec{أ}|| \, ||\vec{ب}|| \, جتا\theta$
  - $س_1 س_2 + ص_1 ص_2 + ع_1 ع_2$
  - خواص

* لإيجاد $\vec{أ} \times \vec{ب}$
  - $\pm ||\vec{أ}|| \, ||\vec{ب}|| \, جا\theta \, \hat{ق}$
  - $\begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$
  - خواص

* لإيجاد $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ}$
  - محدد
  - نعمل $\vec{ب} \times \vec{جـ}$ والناتج نعمله dot مع الأول
  - خواص

* لإيجاد مساحة Δ
  - $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع
  - $\frac{1}{2}$ ضرب ضلعي القائمة
  - $\frac{1}{2}$ الضلعين × جا
  - $\frac{1}{2}$ || الضرب الاتجاهي لضلعين || ← لو معاك إحداثيات الرؤوس
  - صيغة هيرون : $\sqrt{ح(ح-أ)(ح-ب)(ح-جـ)}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

* لإيجاد مساحة متوازي أضلاع
  - || الضرب الاتجاهي لضلعين متجاورين ||
  - || الضرب الاتجاهي لأي ضلع مع أي قطر ||
  - ½ || الضرب الاتجاهي للقطرين ||
  - طول القاعدة × الارتفاع العمودي عليها

* لإيجاد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ}$:
  - يكون معانا زوايا اتجاه $\overrightarrow{أ}$ وندخل عليها جتا
  - يكون معانا مركبات $\overrightarrow{أ}$ وتقسم $\overrightarrow{أ}$ على معياره

* لإيجاد معادلة مستوى نحتاج
  - $\overrightarrow{ن}$، ونقطة
  - $\overrightarrow{ن}$، ع
  - الأجزاء المقطوعة من المحاور

* علاقة مستقيمين في الفراغ
  - متوازيان
  - متطابقان
  - متقاطعان في نقطة
  - متخالفان

* علاقة مستوى بمستوى في الفراغ
  - متوازيان
  - متطابقين
  - متقاطعين في خط

* علاقة مستقيم بمستوى في الفراغ
  - ل ⊂ ط
  - ل // ط
  - ل يقطع ط في نقطة

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي
D.M.RAZK

فنيات هامة في الفراغية

1 - لو أ، ب، جـ على استقامة واحدة

↓

أب = ب جـ + أ جـ **مثلا :**

أ، $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$ // $\overleftrightarrow{أ جـ}$

أ، جـ تقع على المستقيم المار بـ أ، ب

(تحقق معادلته الإحداثية)

VS

$\overrightarrow{أ}$، $\overrightarrow{ب}$، $\overrightarrow{جـ}$ في مستوى واحد

↓

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = ٠$

2 - لو قالك إن خط تقاطع مستويين يقطع مثلًا محور س

دة معناه إن فيه نقطة على محور س (ك، ٠، ٠) مثلًا تقع في كلا المستويين

(بتحقق معادلاتهم)

3 - إذا كان $\overrightarrow{أ}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور س زاوية قياسها ٣٠°

فإن : $\theta_{س}$ = ٣٠°

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ يصنع مع الاتجاه السالب لمحور س زاوية قياسها ٣٠°

فإن : $\theta_{س}$ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ يصنع مع محور س زاوية قياسها ٣٠°

فإن : $\theta_{س}$ = ٣٠°، أ ١٥٠°

4 - متجه اتجاه المستقيم والمتجه العمودي على المستوى دول زوايا اتجاههم مش لازم تكون مع الاتجاه الموجب للمحور

يعني مثلًا لو المستقيم يصنع مع المحاور زوايا (٣٠°، ٩٠°، ١٢٠°) ← دول زوايا الاتجاه رغم انه مقالش إنهم مع الاتجاهات الموجبة

فإن : $\overrightarrow{هـ}$ = (جتا ٣٠°، جتا ٩٠°، جتا ١٢٠°)

∴ $\overrightarrow{هـ}$ = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، ٠، \frac{-١}{٢}) = (\sqrt{٣}، ٠، -١)$

5 - لو قالك ان : ك $\overrightarrow{أ}$ + م $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{و}$

دة معناه إن $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$

6- لو مستقيم عمودي على مستوى $\overleftrightarrow{ن} // \overleftrightarrow{هـ}$ **VS لو مستقيم يوازي مستوى** $\overleftrightarrow{ن} \perp \overleftrightarrow{هـ}$

7- لو عايز معادلة مستوى يحوي مستقيمين شوف الأول $\overleftrightarrow{هـ_١} // \overleftrightarrow{هـ_٢}$ **ولا لا ؟**

لو $\overleftrightarrow{هـ_١}$ **لا يوازي** $\overleftrightarrow{هـ_٢}$ **:** $\overleftrightarrow{ن} // \overleftrightarrow{هـ_١} \times \overleftrightarrow{هـ_٢}$

لو $\overleftrightarrow{هـ_١} // \overleftrightarrow{هـ_٢}$ **:** $\overleftrightarrow{ن} // \overrightarrow{أ ب} \times \overleftrightarrow{هـ_١}$ **أو** $\overrightarrow{أ ب} \times \overleftrightarrow{هـ_٢}$

8- إذا كانت θ **زاوية بين متجهين**

فإن $\theta \in [٠، \pi]$ ، $جتا\theta \in [-١، ١]$ ، $جا\theta \in [٠، ١]$

فنيات الجبر

1 - $(س - ص)^{ن}$ هو المفكوك المقلوب لـ $(-ص + س)^{ن}$ مش $(ص - س)^{ن}$

2 - $ق_{١٠}^{١٧} = ق_{٧}^{١٧}$ ، $ق_{٥}^{٢٠} = ق_{١٥}^{٢٠}$ ، هكذا .....

3 - لو جالك ذات حدين جواه أكثر من حدين اتشقلب بحيث تخليهم حدين ولو مقدرتش يبقى اشتغل على شكله زي ما هو طلب

طب أخليهم حدين ازاي ؟

تحليل — مربع كامل — خواص أسس

4 - $(س + ص)^{ن}$ $(س - ص)^{ن}$
دي مش قاعدة تبسيط
دي هتبقى $(س^{٢} - ص^{٢})^{ن}$

VS

$(س + ص)^{ن} \pm (س - ص)^{ن}$
قاعدة تبسيط

5 - $(١ + س)^{٣}$ ← مفكوك ذات حدين

VS

$١ + س^{٣}$ ← مجموع مكعبين

6 - لو جالك معادلة فيها حدود من مفكوك وكانت الحدود متتالية **(اعمل نسبة وبلاش حد عام)**

مثلًا : $ح_{٥} + ح_{٣} = ٢ح_{٤}$ ← $\div ح_{٤}$ ⟸ $\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} + \frac{ح_{٣}}{ح_{٤}} = ٢$

7 - $|فلان| = \sqrt{(\text{الحقيقي بتاع فلان})^{٢} + (\text{التخيلي بتاع فلان})^{٢}}$

8 - الأعداد الحقيقية الموجبة توضع على الصورة الأسية بحيث تكون سعتها $\pm ٢\pi$

9 - لو $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ جذرين تربيعيين لعدد مركب فإن : طول $\overline{ع_{١} ع_{٢}} = ٢|ع_{١}| = ٢|ع_{٢}|$

10 - $هـ^{ت} \pm هـ^{-ت}$ ← $٢جتا$ ، $٢ت جا$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

فنيات التفاضل

1 $\frac{د(x)}{د(y)}$ نحتاج علاقة تربط x بـ y :

مباشرة : نشتقها بالنسبة لـ (y) (س ، ص في معادلة واحدة)

بارامترية : نطبق خطوات الاشتقاق البارامتري

(أ) نحولها مباشرة بالتخلص من الوسيط ونشتقها بالنسبة لـ (y)

---

2 ميل المماس :

إجباري (الحراقة) : مس مين ومس فين ؟

١) $\frac{د ص}{د س}$ بتاعت اللي اتمس

٢) نعوض فيها بنقطة التماس

اختياري (هلافيت) : $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ، $\frac{-\text{معامل } س}{\text{معامل } ص}$ ، $\frac{ص}{س}$ ، ظاθ

---

3 ميل العمودي :

إجباري (الحراقة) : $-\frac{١}{\text{ميل المماس}}$

اختياري (هلافيت) : $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ، $\frac{-\text{معامل } س}{\text{معامل } ص}$ ، $\frac{ص}{س}$ ، ظاθ

---

4 النقطة الحرجة :

نرسم الدالة : ونشوف النقط اللي في المجال وعندها مماس أفقي

أو رأسي أو ميلين مختلفين

نشتغل جبريًا : مجال / د(س) = ٠ ← غير معرفة

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

5 فترات التزايد والتناقص :

نرسم الدالة : ونشوفها بتزيد فين وتقل فين.

نشتغل جبريًا : من إشارة د(س)

6 القيم المحلية :

نرسم الدالة : ونشوف النقط اللي فصلت التزايد والتناقص

أو

(فصلت التغير عامة)

نشتغل جبريًا : نجيب النقط الحرجة ونصنفها باختبار المشتقة الأولى

أو

اختبار المشتقة الثانية

7 القيم المطلقة :

نرسم الدالة : ونشوف أعلى قيمة على الـ ص على الاطلاق وأقل قيمة على الـ ص على الأطلاق

نشتغل جبريًا : نجيب النقط الحدية والحرجة ونشوف أكبر قيمة فيهم عظمى مطلقة وأقل قيمة فيهم صغرى مطلقة

8 نقط الانقلاب :

نرسم د(س) : ونشوف النقط اللي فصلت التحدب وتنتمي للمجال ومعندهاش ميلين مختلفين !!!

نرسم د(س) : ونشوف النقط التي فصلت التزايد والتناقص لمنحنى د(س)

من إشارة د(س) : هي النقط التي تتغير حولها إشارة د(س)

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

9- التحدب :

نرسم د(س) : ونشوفها أعلى المماسات فين وأسفلها فين

نرسم د`(س) : ونشوفها بتزيد فين وتقل فين

من إشارة د`(س) : جبريًا

10- التكامل المحدد :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\ وس$$

- **د(س) مجهولة** (منعرفش قاعدتها)
  - خواص
  - نترجم لمساحات
- **د(س) معروفة** (نعرف قاعدتها)
  - لو فيه مجاهيل : نكامل يدوي
  - مفيش مجاهيل : على الآلة

نبصمح بقى :

1- لو طلب المشتقة عند نقطة لازم يكون الناتج رقم (ثابت)

2- المشتقات العليا في مسائل الاشتقاق البارامتري :

تجيب المشتقة الأولى بالاشتقاق البارامتري الأول بعدها تشتق تاني بالنسبة للي تحت حسب رتبتها

3-

$$\frac{وص}{وس} \times \frac{وس}{وص} = ١$$

بينما

$$\frac{و^٢ص}{و س^٢} \times \frac{و^٢س}{و ص^٢} \neq ١$$

الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

4- الرمز $د'(س)$ ← يستخدم لو المشتقة دالة في $س$ فقط

الرمز $\frac{ص}{س}$ **أو** $ص'$ ← يستخدم في أي وقت عادي

5- لو إداك ميل المماس : ساوي المشتقة $(\frac{ص}{س})$ بميل المماس تحصل على نقطة التماس.

6- إذا كانت د تزايدية على مجالها أو تناقصية على مجالها فإن :

١) وارد يكون ليها نقط حرجة

٢) مستحيل يكون لها قيم محلية

7- النقطة الحرجة التي عندها المماس أفقي (المشتقة الأولى بـ صفر)

تسمى نقطة توقف

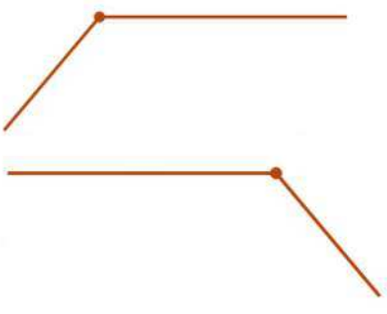
8- المقياس لو :

هنشتقه : مش لازم نعيد تعريفه

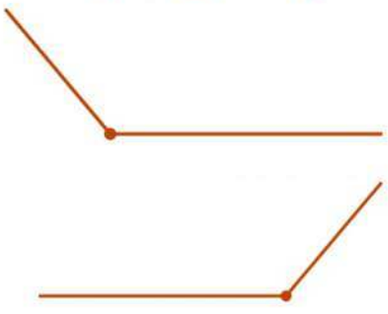
هنكامله : لازم نعيد تعريفه

9-

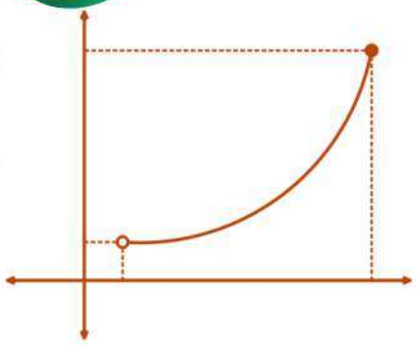
قيم عظمى محلية



قيم صغرى محلية



10- د لها قيمة عظمى مطلقة وليس لها قيمة صغرى مطلقة



11- (أ ، د(أ)) ، (ب ، د(ب)) ← نقط عظمى محلية

∴

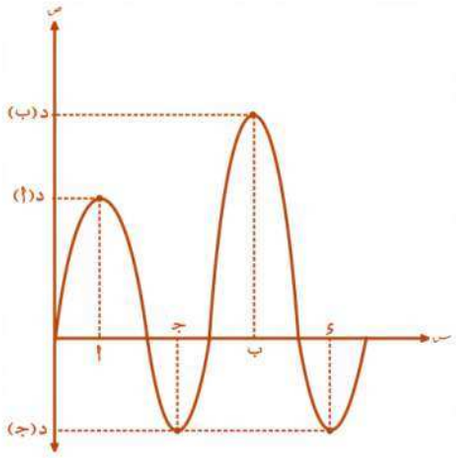
د(أ) ، د(ب) ← قيم عظمى محلية

∴

(ى ، د(ى)) ، (جـ ، د(جـ)) ← نقط صغرى محلية

∴

د(ى) ، د(جـ) ← قيم صغرى محلية



لاحظ: د هنا ليها نقطتين عظمى ونقطتين صغرى لكن ليها قيمتين عظمى وقيمة صغرى واحدة

12- لو النقطة الحرجة فصلت التزايد والتناقص:

بتفتح عندها الفترة غير كدة بتقفل عندها الفترة

13- القيم المحلية غير منفردة:

وارد دالة يكون لها أكثر من قيمة عظمى محلية وأكثر من قيمة صغرى محلية

القيم المطلقة منفردة:

يعني مينفعش دالة يكون ليها غير قيمة واحدة عظمى مطلقة وقيمة واحدة صغرى مطلقة

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

14- **تزايد وتناقص د(س)** : هو إشارة د'(س) والعكس صحيح

15- **تحدب د(س)** : هو إشارة د''(س) والعكس صحيح هو اضطراد د'(س)

16- **أي مسألة سلوك دالة** : لازم نخلى الدالة صريحة [مش بنشتغل على علاقات ضمنية أو بارامترية في سلوك الدالة]

17- **وارد يكون في تكامل له أكثر من ناتج** : كلهم صح باختلاف قيمة الثابت

18- **لو جزأنا الأقواس هيطلع الناتج مختلف عن التعويض أو الحل الجبري لكن الحلين صح**

19- **التكامل المحدد لما نشتغل فيه بالتعويض** :

متنساش تغير الحدود لحدود المتغير الجديد

20- **خد بالك من مسائل المساحات** :

لازم تسأل نفسك المنطقة المحصورة بين مين علشان تحدد هي هتتعمل بـ تكامل واحد ولا أكثر (هي منطقة واحدة ولا أكثر)

21- **مسائل المساحات والحجوم** :

لو إداك فيها منحنى بارامتري لازم تحوله لعلاقة مباشرة علشان تعرف ترسم المنحنى

22- $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ VS $\frac{(\text{و ص})^{2}}{\text{و س}}$ VS $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}^{2}}$ VS $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و س}^{2}}$

- $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ ← المشتقة الأولى بالنسبة لـ س
- $\frac{(\text{و ص})^{2}}{\text{و س}}$ ← مربع المشتقة الأولى
- $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}^{2}}$ ← المشتقة الأولى بالنسبة لـ س^{2}
- $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و س}^{2}}$ ← المشتقة الثانية

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

23 $\frac{\text{ء قطران}}{\text{ء زفت}}$: ميل / ميل المماس للمنحنى (قطران – زفت)

محور ص ← قطران ، زفت → محور س

أ ب **قطران ء زفت:** المساحة بين منحنى (قطران) ومحور زفت في الفترة [أ ، ب]

طبقًا لحالة من ثلاثة :

- **المنحنى فوق :** التكامل هو المساحة
- **المنحنى تحت :** التكامل هو سالب المساحة
- **المنحنى جزء منه فوق وجزء منه تحت** التكامل = المساحة فوق – المساحة تحت

---

24 التكامل دائمًا (مهما حصل) : يساوي مجموع التكاملات ولكن علاقة التكامل بالمساحة هنا.

---

25 يتم دمج تكاملين في تكامل واحد بـ ٤ شروط :

١) نفس الدالة

٢) حد مشترك عامل قطر

٣) الحدين الباقيين مختلفين

٤) معاملات التكاملين متساوية

---

26 لاحظ الفرق :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,وس + \int_{ب}^{جـ} د(س)\,وس = \int_{أ}^{جـ} د(س)\,وس$$

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,وس + \int_{ب}^{أ} ر(س)\,وس = \int_{أ}^{ب} د(س)\,وس - \int_{أ}^{ب} ر(س)\,وس$$

$$= \int_{أ}^{ب} [\,د(س) - ر(س)\,]\,وس$$

الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

27 $\int$ د(س) و س = د(س) + ث ، $\int$ دً(س) و س = د(س) + ث

وهكـــذا .....

$\int$ د(س) و س ⟵ منعرفش نعمله لازم بالخواص أو نترجمه لمساحات

---

28 د(١) ≠ $\int$ دَ(١) و س، **علشان نجيب د(١) لازم نجيب د(س) الأول :**

د(س) = $\int$ دَ(س) و س، ثم نعوض بعدها عن س بـ ١

---

29 **متنساش تفجرها كل ما تـــشـــتـــق**

---

30 ص = $\sqrt{أ^٢ - س^٢}$:هي معادلة نص دائرة مركزها (٠ ، ٠) وطول نصف قطرها يساوي أ وبناءًا عليه :

١) $\int_{-أ}^{أ} \sqrt{أ^٢ - س^٢}$ و س = $\frac{١}{٢}$ مساحة الدائرة = $\frac{\pi}{٢}$ $أ^٢$

٢) $\int_{٠}^{أ} \sqrt{أ^٢ - س^٢}$ و س = $\int_{-أ}^{٠} \sqrt{أ^٢ - س^٢}$ و س = $\frac{١}{٤}$ مساحة الدائرة = $\frac{\pi}{٤}$ $أ^٢$

٣) $\int_{-أ}^{أ} \pi$ ($أ^٢ - س^٢$) و س = حجم كرة طول نصف قطرها أ = $\frac{\pi ٤}{٣}$ $أ^٣$

---

31 **أي منحنى مرسوم متجبش معادلته :**

لإنك أصلًا مش هتكون عارف ده منحنى إيه ؟

---

32 **إذا كانت د(س) ثابتة في الفترة [أ ، ب] فإن :**

جميـع الـنقط فـي الفتـرة] أ ، ب [تكـون حرجـة (عظمـى وصـغرى محليـة فـي نفـس الوقـت)

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM | بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN | الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM | الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الحراقة في المشتقة الأولى

لو طلب منك مشتقة دالة بالنسبة لدالة أخرى فـ ده بنعمله بالاشتقاق البارامتري :

مثال 1 أوجد مشتقة جاس بالنسبة لـ جتاس :

نفرض : ص = جاس ، ع = جتاس

ويكون المطلوب $\frac{د ص}{د ع}$:

$\frac{د ص}{د س} = جتاس ، \frac{د ع}{د س} = -جاس$

$\therefore \frac{د ص}{د ع} = \frac{جتاس}{-جاس} = -ظتاس$

ويمكن حلها بالقاعدة الآتية مباشرة :

$\frac{د (جاس)}{د (جتاس)} = \frac{جتاس}{-جاس} = -ظتاس$

مثال 2 أوجد مشتقة $س^{٢}$ بالنسبة لـ $لو_{٥}$ س : $\frac{د(س^{٢})}{د(لو_{٥} س)} = \frac{٢س}{\frac{١}{س}} = ٢س^{٢}$ ← على طول

مثال 3 إذا كانت ص = $س^{٢} - ٢س$ ، أوجد $\frac{د ص}{د س^{٢}}$

$\because \frac{د ص}{د س^{٢}} = \frac{د(س^{٢} - ٢س)}{د(س^{٢})} = \frac{٢س - ٢}{٢س} = ١ - \frac{١}{س}$

اللوغاريتم منقدرش نشتقه لو أساسه متغير وساعتها لازم نتصرف ونخلي الأساس ثابت :

مثال إذا كان : ص $لو_{س^{٣}}$ هـ = ١ ، أوجد $\frac{د ص}{د س}$

$\because ص = \frac{١}{لو_{هـ} س^{٣}} = لو_{٥} س^{٣}$

$= ٣ لو_{٥} س \therefore ص' = \frac{٣}{س}$

(أ)

$\because لو_{س^{٢}} هـ = \frac{١}{ص} \therefore (س^{٣})^{\frac{١}{ص}} = هـ$

و

$\therefore لو_{٥} (س^{٣})^{\frac{١}{ص}} = لو_{٥} هـ$

$\therefore \frac{٣}{ص} لو_{٥} س = ١$

$\therefore ص = ٣ لو_{٥} س \therefore ص' = \frac{٣}{س}$

(أ)

$\because ص لو_{س^{٣}} هـ = ١$

$\therefore ص \times \frac{لو_{٥} هـ}{لو_{٥} س^{٣}} = ١$

$\therefore ص \times \frac{١}{٣ لو_{٥} س} = ١$

$\therefore ص = ٣ لو_{٥} س \therefore ص' = \frac{٣}{س}$

الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET | الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM | بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN | قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الحراقة في المشتقات العليا

1 إوعى تنسى تفجر:

مثال إذا كانت $\frac{ص}{س} = \sqrt{ص}$ أوجد $\frac{ص^{2}}{س^{2}}$

$\because \frac{ص^{2}}{س^{2}} = \frac{1}{\sqrt{ص}} \times \frac{ص}{س} = \frac{1}{\sqrt{ص}} \times \sqrt{ص}$ $\therefore \frac{ص^{2}}{س^{2}} = \frac{1}{2}$

2 في إثباتات المشتقات العليا حاول وأنت بتحلها تعمل الخاصيتين دول:

- يفضل نشتغل على علاقة ضمنية بدل الصريحة
- يفضل نكمل اشتقاق على الضمنية

مثال إذا كان: $ص = \frac{10 - جتاس}{س}$ أثبت أن: $س ص'' + 2ص' - جتاس = 0$

$\because س ص = 10 - جتاس$ ⟵ $س ص' + ص = جاس$

⟵ $س ص'' + ص' + ص' = جتاس$ ⟵ $س ص'' + 2ص' - جتاس = 0$ #

جرب إنت بقى تحلها بشكلها الأصلي هتحلها في صفحة ونص !

3 لإيجاد المشتقة العليا في الاشتقاق البارامتري:

- هات مشتقتها الأولى بعدها اشتقها بالنسبة للي تحت

يعني مثلًا: لو عندي علاقة بارامترية وطلب $\frac{د^{2}ع}{د ن^{2}}$ هجيب $\frac{دع}{دن}$

بخطوات الاشتقاق البارامتري وبعدها امسك $\frac{دع}{دن}$ اشتقها تاني بالنسبة لـ ن

وهكذا .....

مثال إذا كان ك = م^{2} - 3، ن = لوه م، أوجد: $\frac{د^{3}ك}{د ن^{3}}$

$\because \frac{دك}{دم} = 2م$، $\frac{دن}{دم} = \frac{1}{م}$، $\therefore \frac{دك}{دن} = \frac{2م}{\frac{1}{م}} = 2م^{2}$، $\therefore \frac{د^{2}ك}{د ن^{2}} = \frac{دم}{دن} \times 4م = م \times 4م = 4م^{2}$

$\frac{د^{3}ك}{د ن^{3}} = 8م \times \frac{دم}{دن} = 8م \times م = 8م^{2}$ #

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

أي مسألة يقولك فيها د ، ر كلٍ منهما عكسية للأخرى ويطلب مشتقة واحدة فيهم بتعتمد ساعتها على :

القاعدة دي : $\left.\begin{array}{l} د(ر(س)) = س \\ ر(د(س)) = س \end{array}\right\}$ (أ) أي واحدة فيهم حسب السؤال

مثال إذا كانت $د(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ١$ وكانت ر هي الدالة العكسية للدالة د أوجد $ر'(١)$ حيث $س > ٠$

$\because ر(د(س)) = س \quad \therefore ر(٣س^{٢} - ٢س + ١) = س$

$\therefore (٦س - ٢) ر'(٣س^{٢} - ٢س + ١) = ١$

$\therefore ر'(٣س^{٢} - ٢س + ١) = \frac{١}{٦س - ٢}$ ، بوضع $٣س^{٢} - ٢س + ١ = ١$

$\therefore ٣س^{٢} - ٢س = ٠ \quad ، \quad \therefore س(٣س - ٢) = ٠$

$\therefore س = ٠$ مرفوض حيث $س > ٠$ أ، $س = \frac{٢}{٣}$

$\therefore ر'(١) = \frac{١}{٦ \times \frac{٢}{٣} - ٢} = \frac{١}{٢}$ #

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

دور أول 2021

1 إذا كان : $\overrightarrow{أ ب} = ٢ \overrightarrow{س} - ٣ \overrightarrow{ص}$،
$\overrightarrow{ج ب} = - \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ع}$ فإن :
$\overrightarrow{ج أ}$ = ...

أ $-\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ ب $٣\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$
ج $٣\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ د $-\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$

2 إذا كان المستويان :
$٢ س + ج ص + ٤ ع = ١$،
$(أ + ٢) س + ٦ ص + (ب - ٢) ع$
= ٥ متوازيين فإن : أ ٢ - ب = ...

أ -٦ ب ٦ ج -١٢ د ١٢

3 إذا كان جيب تمام الزاوية التي
يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ} = (ك، ١٢، ٤)$ مع
الاتجاه الموجب لمحور السينات
يساوي $\frac{٣}{١٣}$ فإن : ك = ... حيث
ك ∈ ح

أ ٤ ب $٣\sqrt{١٠}$ ج $-٣\sqrt{١٠}$ د ٣

4 إذا كانت : ١، ω، $\omega^{٢}$ هي الجذور
التكعيبية للواحد الصحيح ،
وكانت $س = \frac{١}{١ + \omega ت}$ ،
$ص = \frac{\omega + ت}{١ + \omega^{٢} ت}$ فإن $س - ص$ = ...

أ $ت + ١$ ب $١ - ت$ ج ١ د ت

5 إذا كان معامل الحد السادس في
مفكوك $(أ س + \frac{١}{ب س})^{١٠}$ حسب
قوى $س$ التنازلية يساوي $^{١٠}ل_{٥}$
فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ... حيث أ ∈ ح ،
ب ∈ ح*

أ -١ ب ١ ج ١٠ د $\frac{١}{١٠}$

6 إذا كانت المسافة بين النقطة
$(-١، ٢، م)$ حيث م ∈ ح$^{+}$ والخط
المستقيم $\overrightarrow{ك} = (-١، ٣، ٠) +$
$ل (٠، -٣، ٠)$ هي ٨ وحدة طول
فإن قيمة م تساوي .....

أ ٤ ب ١٦ ج ٨ د ٢

7 إذا كان قياس الزاوية بين
المستويين : $س + ص - ١ = ٠$،
$ك ص + ع - ١ = ٠$ يساوي ٦٠° فإن :
ك = ... حيث ك > ٠

أ ٤ ب $\frac{١}{٢}$ ج ٢ د ١

8 إذا كان :
$ع = ك (جا \frac{٤}{٣} \pi - ت جتا \frac{٤}{٣} \pi)$
حيث ك > صفر فإن : $ع^{٦}$ = ...

أ $ك^{٦}$ ب $٦ ك$ ج $-ك^{٦}$ د $-٦ ك$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

9 إذا كان ع عددًا مركبًا،
ع + $\overline{ع}$ = ٢ هـ$^{\pi ت}$ فإن : ع يمكن أن يساوي .....

أ هـ$^{\pi ت}$ ب ٢ هـ$^{\frac{\pi}{٢} ت}$ ج هـ$^{-\frac{\pi}{٢} ت}$ د ٢ هـ$^{\pi ت}$

10 في مفكوك $(س^{٢} + ٢ + \frac{١}{س^{٢}})^{٦}$
معامل الحد الذي يشتمل على $س^{٢}$ هو .....

أ $ق_{٥}^{١٢}$ ب $ق_{٦}^{١٢}$ ج $ق_{٩}^{١٢}$ د $ق_{٥}^{٦}$

11 إذا كان : $|\overrightarrow{أ ب}| = \sqrt{١٣}$ ، $\overrightarrow{أ ب} \parallel \overrightarrow{ج د}$
وفي نفس اتجاهه حيث
د (١، ٣، −٢)، جـ (١، −١، ٤)،
$\overrightarrow{ب ص}$ // (−٢، ٣، ٥) فإن : $\overrightarrow{أ ص} \times \overrightarrow{ب ص}$ = ...

أ −١٩ $ك^{٢}$ + ٦ $ك$ + ٤ $ع^{٢}$ ب −٢٨ $ك^{٢}$ − ١٢ $ك$ − ٨ $ع^{٢}$
ج −٢٨ $ك^{٢}$ + ١٢ $ك$ − ٨ $ع^{٢}$ د −١٩ $ك^{٢}$ − ٦ $ك$ − ٤ $ع^{٢}$

12 إذا كان أ ب جـ مثلث فيه :
أ (١، ٢، ٤)، ب (−٢، ٠، ٥)،
جـ (١، ٤، ٠) وكانت م نقطة تقاطع متوسطات المثلث فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أ م}$ هي .....

أ $\overrightarrow{ر}$ = (١، ٢، ٤) + ك (−١، ٤، ٥)
ب $\overrightarrow{ر}$ = (١، ٢، ٤) + ك (−١، ١، ١)
ج $\overrightarrow{ر}$ = (١، ٢، ٤) + ك (−١، ٠، −١)
د $\overrightarrow{ر}$ = (٠، ٢، ٣) + ك (١، ٢، ٤)

13 $\int \frac{س}{س^{٢} - ٢س + ١}$ د س = ... + ث
حيث ث ثابت

أ لو |س − ١| − $\frac{١}{س - ١}$
ب لو |س − ١| + $\frac{١}{س - ١}$
ج لو |س − ١| + (س − ١)^{٢}
د لو |س^{٢} − ٢س + ١| + $\frac{١}{س - ١}$

14 إذا كانت الدالة
د : د (س) = جا س + $\frac{١}{٢}$ جا ٢س
، س ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[فإن الدالة د .....

أ لها قيمة صغرى محلية عند س = $\frac{\pi}{٤}$
ب لها قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{\pi}{٦}$
ج ليس لها قيمة عظمى محلية في هذه الفترة
د لها قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{\pi}{٣}$

15 القيمة الصغرى المطلقة للدالة
د : د (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٩}$ ،
س ∈ [−٣، ٣] هي .....

أ ٣$\sqrt{٢}$ ب −٣$\sqrt{٢}$ ج ٣ د −٣

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

إذا كانت د ، ر دالتين كثيرتي

16 حدود ، د (س) = جـ $س^{ك}$ + ر (س)

وكان : ر (١) = ك ، ر′ (١) = ٦

وكان لمنحنى الدالة د نقطة

انقلاب هي (١ ، ٥) حيث جـ ، ك

ثابتان فإن ك − جـ = ...

أ −١١ ب ٥ جـ ١١ د −٥

17 معادلة العمودي على المماس

للمنحنى ص = $إ^{و}$ ظا س عند نقطة

واقعة على المنحنى و إحداثيها

السيني يساوي $\frac{\pi}{٤}$ هي .....

أ ٤ س − ٨ ص = π ب ٨ ص + ٤ س = π

جـ ٤ س + ٢ ص = π د ٤ س − ٢ ص = π

إذا كانت د دالة زوجية ومتصلة

18 على ح وكان :

$\int_{-٥}^{٠} د(س)\,و س = ٢$ ،

$\int_{٠}^{٣} د(س)\,و س = ب$

فإن : $\int_{-٥}^{-٣} د(س)\,و س$ = ...

أ ب − ٢ ب ٢ − ب جـ ٢ − ب د ب − ٢

19 إذا كانت :

د (س) = $س^{٣}$ − ٣ س − ٤

فإن الدالة د تكون تناقصية

عندما .....

أ | س | > ١ ب | س | < ١

جـ س > ١ د س < −١

20 $\int \frac{٢هـ^{س} + ١}{هـ^{س}}\,و س$ = ... + حيث ث

ثابت

أ ٢ س + $هـ^{-س}$ ب ٢ س − $هـ^{-س}$

جـ ٢ + لو $هـ^{س}$ د ٢ − $هـ^{س}$

21 المماس للمنحنى : س = جتا ٢ θ ،

ص = جا ٣ θ عندما θ = صفر يكون

.....

أ موازي لمحور الصادات

ب موازي لمحور السينات

جـ موازي للمستقيم ص = س

د موازي للمستقيم ص = − س

إذا كانت : ع = د (ن) حيث

22 ع ، ن ∈ $ح^{+}$ وكان معدل تغير ع

بالنسبة ل ن يتناسب عكسيًا مع ن

وكانت د (١) = ٢٠٠ ، د ($\sqrt{٣}$ هـ) = $\frac{٧٠٠}{٣}$

فإن د (٣) = ...

أ ١٠٠ لو (٣ $هـ^{٢}$) ب ٢٠٠ لو (٩ هـ)

جـ ١٠٠ لو ($هـ^{٢}$ + ٣) د ٢٠٠ لو (٩ + هـ)

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بنا لطلاب الإعلانات
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر
ENG/AHMED ESSAM ELDIN بيدج الفيس بوك
ENG . AHMED ESSAM قناة اليوتيوب
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

23 أ $\frac{٢}{س \text{ لو } س}$ د س = ... + ث

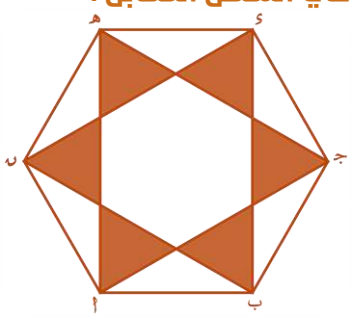
أ ٢ لو | لو س |

ب $\frac{١}{٢}$ لو | لو | س | |

ج لو | لو | س | |

د لو | س |

في الشكل المقابل :



24 أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم ، إذا كان طول ضلعه يزداد بمعدل $\sqrt{٣}$ سم/ث فإن معدل التغير في مساحة الجزء المظلل بالنسبة للزمن يساوي ..... سم^{٢}/ ث عند اللحظة التي يكون فيها طول ضلعه ٤ سم

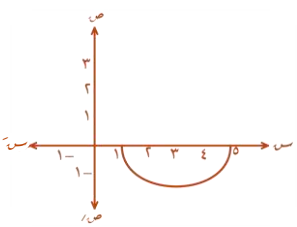
أ ١٢ ب ٨ ج $٣\sqrt{١٢}$ د $٣\sqrt{٨}$

25 إذا كانت : ص = $\frac{١}{(س + ١)^{٢}}$ فإن معدل تغير $\frac{١}{ص}$ بالنسبة إلى س^{٢} عند س = ١ يساوي .....

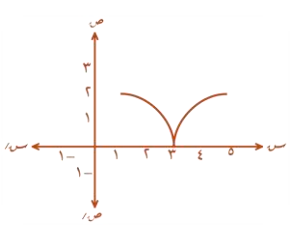
أ $\frac{١}{٢}$ ب ٤ ج ٢ د $\frac{١}{٤}$

26 إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [١ ، ٥] ، د$'$ (٣) غير معرفة ، د$'$ (س) > ٠ لكل س ≠ ٣ فإن الشكل الذي يمكن أن يمثل منحنى الدالة د (س) هو .....

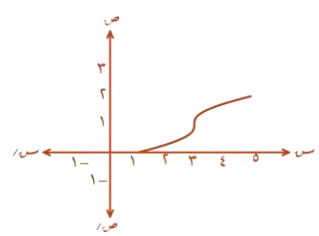
أ



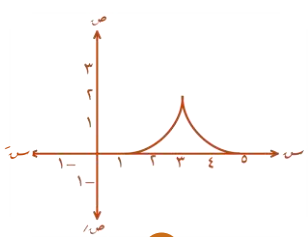
ب



ج



د



27 إذا كانت : ص = ٨ س^{٣} - ٤ وكان : $\frac{٢}{٣}$ ص$'$ = م س^{٢} ص حيث س ≠ صفر فإن : م = ...

أ ٦ ب ٤ ج ٣ د ٢

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

معادلة المماس للمنحنى : $س ص = س^{ص}$ عند النقطة (١ ، ١) الواقعة عليه هي .....

أ) $س - ١ = ٠$ ب) $ص + س = ٢$

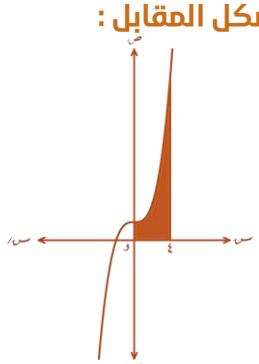
جـ) $ص - ١ = ٠$ د) $س - ص = ٠$

إذا كان : $س \frac{د ص}{د س} - ص = ٣$ وكانت : $س = ١$ عندما $ص = -٢$ فإن العلاقة بين $س$ ، $ص$ هي .....

أ) $|ص| = |س + ٣|$ ب) $|ص + ٣| = |س|$

جـ) $ص + س = -١$ د) $ص + ٢س = ٠$

الشكل المقابل :

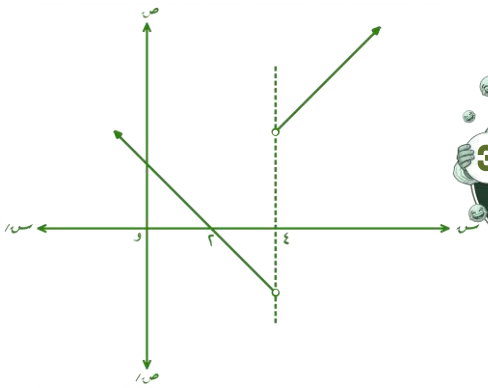


يمثل منحنى الدالة د :

$د(س) = س^{٢} + أ$ فإذا كانت مساحة المنطقة المظللة = ٦٨ وحدة مربعة فإن : أ = ...

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى للدالة المتصلة د التي مجالها ح فإن العبارة الخطأ فيما يلى هي .....



أ) الدالة د لها نقطة انقلاب عند $س = ٤$

ب) الدالة د لها قيمة عظمى محلية عند $س = ٢$

جـ) منحنى الدالة د محدب لأعلى في $]-\infty ، ٤[$ ، محدب لأسفل في $]٤ ، \infty[$

د) $د(-٣) < د(-٢)$

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

دور ثاني 2021

1 إذا كان الحد الخالي من $س$ في مفكوك $(س^{٢} + \frac{٥}{س})^{ن}$ حسب قوى $س$ التنازلية هو $ح_{٧}$، فإن قيمة $ن$ = ...

أ ٩ ب ٧ ج ١٠ د ٨

2 في مفكوك $(١ + س)^{٢٠}$ حسب قوى $س$ التصاعدية إذا كان معامل $ح_{ر+٢}$ = معامل $ح_{ر+٤}$ ، فإن قيمة $ر$ = ...

أ ٩ ب ٨ ج ١٠ د ١١

3 الصورة العامة لمعادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $(-٢، ٢، -١)$ ويوازي المستوى الذي معادلته $(٢، ٣، -٥) . \overrightarrow{ر} = ١$ هي .....

أ $٢س + ٣ص - ٥ع = -٧$

ب $٢س + ٢ص - ع = ١$

ج $٢س - ٣ص + ٥ع = -٧$

د $٢س + ٣ص - ٥ع = ٧$

4 جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ} = (-٢ك، ٢ك، ك)$ حيث $ك \in]٠، ١[$ هي .....

أ $(\frac{-٢}{٣}، \frac{٢}{٣}، \frac{١}{٣})$ ب $(\frac{-٢ك}{٣}، \frac{٢ك}{٣}، \frac{-ك}{٣})$

ج $(\frac{-٢}{٣}، \frac{-٢}{٣}، \frac{-١}{٣})$ د $(\frac{٢ك}{٣}، \frac{٢ك}{٣}، \frac{ك}{٣})$

5 إذا كان :

$ع_{١} = ١٥ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})$،

$ع_{٢} = ٣ (جتا \theta + ت جا \theta)$

حيث $\theta \in]٠، \frac{\pi}{٢}[$ فإن $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ = ...

أ ٥ $(جتا \theta + ت جا \theta)$

ب ١٢ $(جتا (\frac{\pi}{٢} - \theta) + ت جا (\frac{\pi}{٢} - \theta))$

ج ٥ $(جتا (\frac{\pi}{٢} - \theta) + ت جا (\frac{\pi}{٢} - \theta))$

د ١٥ $(جا \theta + ت جتا \theta)$

6 البعد العمودي بين النقطة $(٢، ٤، ٧)$ والخط المستقيم $\frac{٢س - ٨}{٣} = \frac{٢ع - ١٤}{٥} = ٤ - ص$ يساوي ..... وحدة طول

أ صفر ب ١ ج ٢ د ٥

7 إذا كان : أ ب ج مثلث فيه النقطة ء منتصف $\overline{ب ج}$، أ $(٣، ١، ٥)$، ب $(٢، ٣، ٧)$، ج $(٠، ٣، ١)$ فإن طول $\overline{أ ء}$ = ... وحدة طول

أ ٩ ب ٢ ج ٧ د ٣

8 في مفكوك $(\sqrt{س} + \frac{١}{س})^{٨}$ حسب قوى $س$ التنازلية إذا كان $ح_{٤}، ح_{٥}، ح_{٧}، ح_{ن}$ كميات متناسبة فإن قيمة $س$ = ...

أ $\frac{١}{٢}$ ب $\frac{٥}{٨}$ ج $\frac{٥}{٢}$ د $\frac{٨}{٥}$

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بنا لطلاب الإعدادية
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بنا لطلاب الثانوية
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

9 إذا كان : ع$_1$ ، ع$_2$ عددان مركبان ،
ع$_1$ = هـ$^{٥ + ل\pi ت}$ ، ع$_2$ = هـ$^{(٥ + ل ت)\pi}$
حيث $-\frac{١}{٢} < ل < \frac{١}{٢}$ فإن
السعة الأساسية للعدد المركب
ع$_1$ + ع$_2$ يمكن أن تساوي .....

أ $\frac{٢\pi}{٣}$ ب $-\frac{\pi}{٢}$ ج π د $-\frac{\pi}{٦}$

10 إذا كانت النقطة أ ($\sqrt{ل}$ ، $-\sqrt{ل}$)
تمثل العدد المركب ع على شكل
أرجاند، حيث ل > ١، فإن الصورة
الأسية للعدد ع هي .....

أ $\sqrt{٢}$ ل هـ$^{-\frac{\pi}{٤} ت}$ ب $\sqrt{٢}$ ل هـ$^{\frac{\pi}{٤} ت}$
ج $\sqrt{٢}$ ل هـ$^{\frac{\pi}{٤} ت}$ د $\sqrt{٢}$ ل هـ$^{-\frac{\pi}{٤} ت}$

11 إذا كان معامل الحد الذى يحتوي
على س في مفكوك
$(س + \frac{أ}{س^{٢}})^{٧}$ يساوي ٤٩ فإن
قيمة الثابت أ = ...

أ -٧ ب ٤٩ ج -٤٩ د ٧

12 إذا كان $\overrightarrow{ى}$ هو متجه الوحدة
العمودي على مستوى المتجهين
$\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ حسب قاعدة اليد اليمنى
حيث $\overrightarrow{ى}$ = ($\frac{٣}{٥}$ ، ٠ ، $\frac{٤}{٥}$)
وكان || $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ || = ٥
فإن (٣ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$) × (٤ $\overrightarrow{أ}$ + ٢ $\overrightarrow{ب}$) = ...

أ (٣ ، ٠ ، ٤) ب (٣٠ ، ٠ ، ٤٠)
ج (−٣٠ ، ٠ ، −٤٠) د (٦ ، ٠ ، ٨)

13 الصورة المتجهة لمعادلة
المستقيم المار بالنقطة
أ (٢ ، −١ ، ٤) ويوازى منصف
الزاوية بين $\overrightarrow{و ص}$ ، $\overrightarrow{و ع}$ في
المستوى ص ع هي .....

أ $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٤) + ك (٠ ، ١ ، ١)
ب $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٤) + ك (٠ ، −١ ، ١)
ج $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٤) + ك (−١ ، ٠ ، ١)
د $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٤) + ك (١ ، ٠ ، −١)

14 إذا كان : أ $\frac{٢}{ص}$ د ص = أ $\frac{١}{س}$ د س
، فإن : لو ص^{٢} = ... + ث حيث ث
ثابت

أ لو | س | ب | س |
ج لو | س + ص | د لو | س − ص |

15 إذا كانت : ع = س + ٢ ، فإن :
أ $\frac{س - ٢}{س^{٢} + ٤ س + ٤}$ د س = ... + ث
حيث ث ثابت

أ لو | ع | − $\frac{٤}{ع}$ ب لو | ع | + $\frac{٤}{ع}$
ج $\frac{-١}{٢ ع^{٢}} - \frac{٤}{٣ ع^{٣}}$ د $\frac{-١}{٢ ع^{٢}} + \frac{٤}{٣ ع^{٣}}$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

16 إذا كانت : $3 ص^{2} \frac{د ص}{د س} = 2 س + 1$
، وكانت $س = 1$ عندما $ص = -1$ ،
فإن العلاقة بين $س$ ، $ص$ هي .....

أ $ص^{3} = س^{2} + س - 3$
ب $ص^{3} = س^{2} - 2$
ج $ص^{3} + س^{2} =$ صفر
د $ص^{3} + 1 = س^{2} - س$

17 إذا كانت : $س = ظا (1 + ص)$ ، فإن
قيمة $\frac{د ص}{د س}$ = ... عند $س = 2$

أ ٠,٥ ب ٠,٢ ج ١ د ٥

18 المماس للمنحنى
$2 س + 1 = جا ص$ يكون موازيًا
لمحور الصادات عند النقطة .....

أ $(\frac{\pi}{2} ، ٠)$ ب $(\frac{-1}{2} ، \pi)$
ج $(٠ ، \frac{\pi}{2})$ د $(٠ ، \frac{-1}{2})$

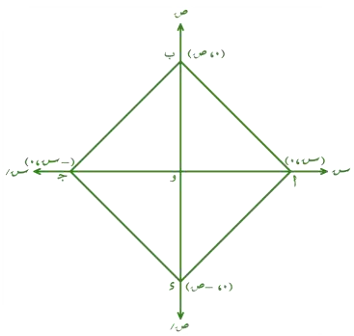
19 ميل العمودي على المماس
للمنحنى $س = هـ^{ص}$ ، $ص = هـ^{2 ن + 2}$ عند
النقطة الواقعة عليه و إحداثيها
السيني يساوى ١ هو .....

أ $-2 هـ^{2}$ ب $\frac{-1}{2 هـ^{2}}$ ج $2 هـ^{2}$ د $\frac{هـ^{2}}{2}$

20 إذا كانت : $س^{2} = هـ^{2 ص}$
فإن : $س \times \frac{د ص}{د س}$ = ...

أ -1 ب ١ ج $س$ د $هـ^{2 س}$

في الشكل المقابل :

21 

إذا كان : أب = ٥ سم ، فإن مساحة
الشكل أ ب جـ ء تكون أكبر ما يمكن
عندما .....

أ $س = ص$ ب $س = 2 ص$
ج $ص = 2 س$ د $3 س = 4 ص$

22 القيمة العظمى المطلقة للدالة
د : د $(س) = س$ لو $س$ حيث
$س \in [هـ^{-2} ، هـ]$ تساوي .....

أ $-2 هـ^{-2}$ ب $هـ$ ج $2 هـ$ د $-هـ^{-1}$

23 إذا كانت د دالة زوجية متصلة على
ح ، وكان $\int_{-3}^{3} د (س) د س = 5$ ،
فإن : $\int_{-3}^{3} [د (س) - د (س)] د س$
= .....

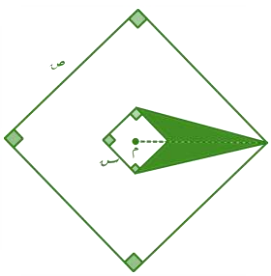
أ ١٥ ب -10 ج -15 د ١٠

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بنا لطلاب الإعدادية
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بنا لطلاب الثانوية
ENG/AHMED ESSAM ELDIN بيدج الفيس بوك
ENG . AHMED ESSAM قناة اليوتيوب
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

24 مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ١ − هـ^س ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ك حيث ك > ٠ تساوي ..... وحدة مساحة

أ هـ^ك − ك + ١
ب هـ^ك + ك + ١
جـ هـ^ك + ك − ١
د هـ^ك − ك − ١

في الشكل المقابل :



25 مربعان لهما نفس المركز طولا ضلعيهما ١ سم ، ٤ سم ، فإذا كان طول ضلع الأول يتزايد بمعدل ١ سم/ث ، بينما طول ضلع الثاني يتناقص بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/ث ، فإن مساحة المنطقة المظللة بعد $\frac{١}{٢}$ ثانية .....

أ تتوقف لحظيًا عن الزيادة
ب تتوقف لحظيًا عن النقصان
جـ تزداد بمعدل $\frac{١}{٤}$ سم^٢/ث
د تتناقص بمعدل $\frac{١}{٤}$ سم^٢/ث

26 إذا كانت معادلة المماس للمنحنى ص = (٤ س) = ٢ س عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة عليه هي ص = م س + جـ ، فإن : م = ...

أ ١ − ٢ لو ٢
ب ٢ لو ٢ − ١
جـ ٢ لو ٢ + ١
د ٢ + لو ٢

27 إذا كانت الدالة د : د (س) = ٣ أ س^٣ − ب س − ٥ لها قيمة عظمى محلية عند س = ١ ، فإن : $\frac{ب}{أ}$ = ...

أ −٩
ب ٩
جـ ٢٠
د −٢٠

28 إذا كانت : د (س) = (س + ٣) هـ^س ، فإن منحنى الدالة د يكون محدبًا لأسفل في الفترة .....

أ] −∞ ، −٥ [
ب] −٦ ، ∞ [
جـ] −٥ ، ∞ [
د] −∞ ، −٣ [

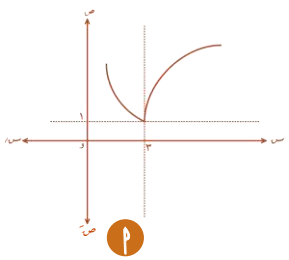
29 مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = د (س) حيث ص = ن − $\frac{ن^٢}{٤}$ ، س = $\frac{ن}{٢}$ ومحور السينات تساوي ..... وحدة مساحة

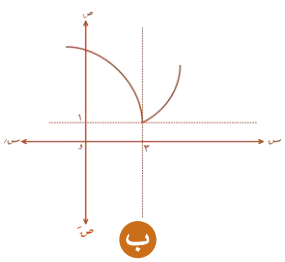
أ $\frac{٧}{٣}$
ب $\frac{٣}{٤}$
جـ $\frac{٤}{٣}$
د $\frac{٣}{٧}$

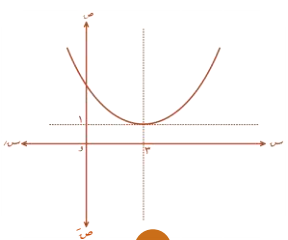
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

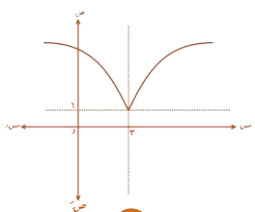
30 منحنى الدالة المتصلة د الذي يحقق الخواص التالية :

د (٣) = ١ ، د`( س ) < ٠ عندما س < ٣ ، د`(س) > ٠ عندما س > ٣ ، د`(س) < ٠ لكل س ≠ ٣ هو .....

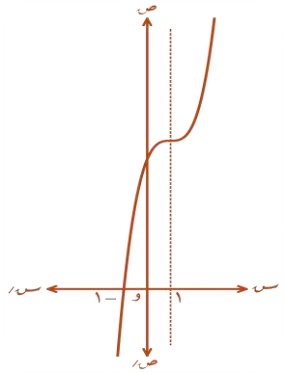
أ 

ب 

جـ 

د 

الشكل المقابل :



31 يمثل منحنى الدالة ك (س) المتصلة على ح والتي لها مماس أفقي عند س = ١ ، وكانت د دالة قابلة للاشتقاق على ح ، حيث :

د`(س) = | ك (س) | فإن العبارة الصحيحة فيما يلي هي

أ الدالة د لها نقطة انقلاب عند س = −١

ب الدالة د لها قيمة صغرى محلية عند س = −١

جـ الدالة د لها نقطة انقلاب عند س = ١

د منحنى الدالة د محدب لأعلي في الفترة] −١ ، ١ [

32 إذا كانت الدالة د : د (س) = $س^{٢} + \frac{٣٢}{س}$ حيث ١ ∈ ح فإن الدالة تكون تناقصية في الفترة .....

أ] −∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [ب] ١ ، ∞ [

جـ] −∞ ، ١ [د] −∞ ، ٠ [،] ٠ ، ١]

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بأطلاب الأولاين
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بأطلاب السنتر
ENG/AHMED ESSAM ELDIN صفحة المدرس بالفيس بوك
ENG . AHMED ESSAM قناة اليوتيوب
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

1 مجموع معاملي الحدين الأوسطين في مفكوك $(\frac{٢}{س} + \frac{س^{٢}}{٢})^{٢٥}$ يساوي .....

أ $٢^{٢٥} ص^{١٣}$ ب $٤^{٢٥} ص^{١٢}$ ج $\frac{٥}{٢}^{٢٥} ص^{١٢}$ د $\frac{٢}{٥}^{٢٥} ص^{١٣}$

2 قياس الزاوية بين المستويين $س + ص + ٢ ع = ٧$، $ك$. $(٢، -١، ١) = ٦$ يساوي ..... °

أ ٣٠ ب ٤٥ ج ٦٠ د ٩٠

3 في مفكوك $(\frac{١}{س} + ك س^{٢})^{٨}$ حسب قوى $س$ التصاعدية، إذا كان معامل $س^{٧} = ٥٦$، فإن قيمة $ك$ = ...

أ $-\frac{١}{٥}$ ب ٥ ج ١ د -١

4 إذا كانت النسبة بين الحد الرابع من البداية إلى الحد الرابع من النهاية في مفكوك $(\frac{أ}{س} + \frac{س}{أ})^{ن}$ تساوي $أ^{٤} : س^{٤}$، فإن : $ن$ = ...

(علمًا بأن $س \in ح^{*}$، $أ \in ح^{*}$)

أ ٢ ب ٤ ج ٦ د ٨

5 إذا كان المستوى : $ك$. $(١، م، ١٦) = ٥$، والمستوى : $ل س + ٢ ص + ٨ ع = ٨$ متوازيين فإن : $ل م$ = ...

أ ٨ ب ٢ ج $\frac{١}{٢}$ د $\frac{١}{٨}$

6 المستقيم المار بالنقطة $(٢، ٢، ٨)$ والمتجه $(٣، ١، ٤)$ متجه اتجاه له يقطع محور السينات في النقطة .....

أ $(-٤، ٠، ٠)$ ب $(٤، ٠، ٠)$

ج $(١، ٠، ٠)$ د $(-١، ٠، ٠)$

7 إذا كانت $\overrightarrow{أ}$، $\overrightarrow{ب}$، $\overrightarrow{ج}$، $\overrightarrow{هـ}$ أربعة متجهات تقع جميعها في مستوي واحد، وكان : $\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$، $\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$، $\overrightarrow{ج} \times \overrightarrow{هـ} = ٣ \overrightarrow{ى}$، فإن $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ = ... حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهات $\overrightarrow{أ}$، $\overrightarrow{ب}$، $\overrightarrow{ج}$، $\overrightarrow{هـ}$

أ $-\frac{٣}{٢} \overrightarrow{ى}$ ب $\frac{٣}{٢} \overrightarrow{ى}$ ج $\frac{٢}{٣} \overrightarrow{ى}$ د $-\frac{٢}{٣} \overrightarrow{ى}$

8 إذا كانت أ $(٣، ٢، ٥)$ نقطة في الفراغ مسقطها على المستوى $س ص$ هو نقطة ب، ومسقطها على المستوى $س ع$ هو نقطة جـ، فإن $\overrightarrow{ب جـ}$ = ...

أ $-٢ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص}$ ب $٢ \overrightarrow{ص} - ٥ \overrightarrow{ع}$

ج $-٢ \overrightarrow{ص} + ٥ \overrightarrow{ع}$ د $-٢ \overrightarrow{س} - ٣ \overrightarrow{ع}$

أ

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بأكاديمية الجواب
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بأ/ أحمد عصام
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

9 إذا كان الجذران التربيعيان للعدد المركب $\frac{-٧ + ٢٦ت}{٥ - ٢ت}$ هما $\pm$ (أ + ب ت) حيث أ، ب عددان حقيقيان فإن أ + ٢ ب يمكن أن تساوي ..... (حيث $ت^{٢} = -١$)

أ ٥ ب ٤ ج صفر د -٤

10 إذا كان : $ع_{١} = ٩ + ١٢ت$، $ع_{٢} = هـ^{\frac{-\pi}{٢}ت}$ فإن : $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ = ...

أ ٣ ($-٤ + ٣ت$) ب ٣ ($٣ + ٤ت$)

ج ٣ ($-٤ - ٣ت$) د ٣ ($٣ - ٤ت$)

11 طول العمود المرسوم من النقطة أ (٠، ٣، ٠) على المستقيم الذي معادلته : $\overleftrightarrow{ل} = (٣، ٢، ١) + ك (٢، $ $-١، ٤)$ يساوي ..... وحدة طول

أ $\sqrt{٢١}$ ب $\frac{\sqrt{١٢١}}{٢١}$ ج $\sqrt{١٠}$ د $\frac{\sqrt{١١٠}}{٢١}$

12 إذا كانت أ (٢، -٥، ٧)، ب (١، ٣، ٦)، نقطة جـ تنتمي إلى محور الصادات، فإذا كانت النقطة جـ على أبعاد متساوية من أ، ب فإن إحداثيات النقطة جـ هي .....

أ (٠، ٢، ٠) ب (٠، ١، ٠)

ج (٠، -٢، ٠) د (٠، -١، ٠)

13 إذا ($٣ س^{٢} - \frac{٣}{س}$) $ى س$ = ... + ث، حيث $س \neq ٠$

أ $س^{٣} - ٣ لو |\frac{٣}{س}|$ ب $٣ س^{٣} - ٣ لو |س|$

ج $س^{٣} - ٣ لو |س|$ د $٣ س^{٣} - لو |\frac{٣}{س}|$

14 إذا ($٤ س جا ٢ س - ٢ جتا ٢ س$) $ى س$ = ... + ث

أ $٢ س جتا ٢ س$ ب $-٢ س جا ٢ س$

ج $-٢ س جتا ٢ س$ د $٢ س جا ٢ س$

15 إذا كانت الدالة د : د (س) = $س^{٣} - ٦ س^{٢} + ١٥$، فإن الدالة تكون تناقصية في الفترة .....

أ] ٠، ٤ [ب] ٤، ∞ [

ج] $-\infty$، ٠ [د ح $-$] ٠، ٤ [

16 إذا كانت : $٢ س ص + \pi جا ص = ٢ \pi$ فإن : $\frac{ى ص}{ى س}$ = ... عند النقطة (١، $\frac{\pi}{٢}$)

أ $-\frac{\pi}{٢}$ ب $\frac{\pi}{٢}$ ج π د $-\pi$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

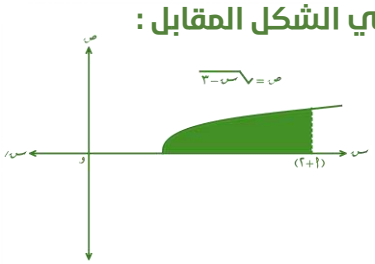
17 إذا كانت د : د (س) = $\sqrt[3]{س^2 - ٦ س}$ فإن عدد النقاط الحرجة لمنحنى الدالة د يساوي .....

أ صفر ب ١ جـ ٢ د ٣

18 إذا كان : $هـ^{ص} - هـ^{س}$ = صفر، فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

أ $\frac{هـ}{س}$ ب $\frac{١}{س}$ جـ $\frac{١}{ص}$ د $\frac{هـ}{ص}$

في الشكل المقابل :



19 إذا كانت مساحة الجزء المظلل = $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة، فإن : أ = ...

أ ٢ ب ٣ جـ ٤ د ٥

20 إذا كانت د دالة متصلة على ح، $\int_{-١}^{٧}$ [د (س) − ٢ س] د س = ٢٢، فإن : $\int_{-١}^{٧}$ [٢ د (س) + س] د س = ...

أ ١١٦ ب ١٦٤ جـ ٧٦ د ٦٦

21 إذا كانت د دالة زوجية متصلة في الفترة [−٣ ، ٣]، وكان :

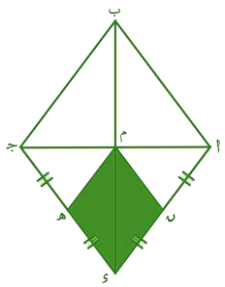
$\int_{-٣}^{٣}$ د (س) د س = ٢٠،

$\int_{٠}^{٣}$ د (س) د س = ٨، فإن :

$\int_{-٣}^{٠}$ د (س) د س = ...

أ −٢ ب ٢ جـ ١٢ د ٢٨

في الشكل المقابل :



22 أ ب جـ د معين يتقاطع قطراه في نقطة م، فإذا كانت النقطتان د، هـ منتصفي $\overline{أد}$، $\overline{جد}$، وكان طولا قطريه $\overline{أجـ}$، $\overline{بد}$ هما ٦ سم، ٨ سم على الترتيب، بدأ أ جـ في التزايد بمعدل ١ سم/ث، بينما بدأ ب د في التناقص بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/ث، فإن مساحة سطح الشكل م د هـ في نهاية الثانية الخامسة .....

أ تتوقف لحظيًا عن الزيادة

ب تتوقف لحظيًا عن النقصان

جـ تزداد بمعدل ٢ سم^{٢}/ث

د تتناقص بمعدل ٢ سم^{٢}/ث

الموقع الخاص بنا لطلاب الأزهر WWW.JAWACADEMY.NET
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
صفحة الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

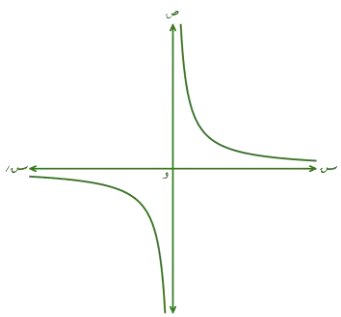
23

معادلة العمودي على المنحنى $س ص^{-س} = ١$ عند نقطة واقعة على المنحنى إحداثيها السيني يساوي هـ هي .....

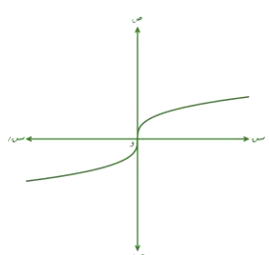
أ $٣ ص - س = ٢ هـ$
ب $٣ س - ص = ٢ هـ$
ج $٣ ص - ٢ س = هـ$
د $ص + س = ٢ هـ$

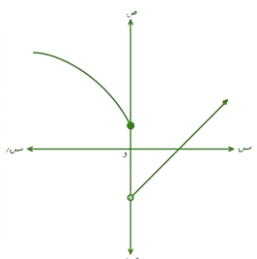
24

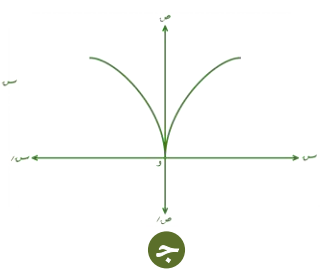
إذا كان الشكل المقابل :

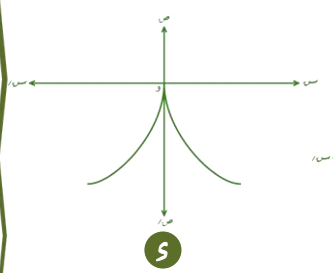


يمثل منحنى المشتقة الأولى للدالة $ص = د(س)$ المُعرفة على ح، فإن الشكل الذي يمكن أن يمثل الدالة د هو الشكل .....

أ 

ب 

ج 

د 

25

إذا كان منحنى الدالة $د(س) = ا س^{٣} - ٢ س^{٢} + ٤ له$ نقطة انقلاب عند $س = \frac{١}{٣}$ ، فإن : $\frac{د(١)}{د'(١)} =$ .....

أ -٢
ب -١
ج ١
د ٢

26

إذا كانت الدالة $د : د(س) = \frac{هـ^{٢س} + ١}{هـ^{س}}$ ، فإن : .....

أ النقطة $(٢ ، ٠)$ صغرى محلية للدالة
ب النقطة $(٢ ، ٠)$ عظمى محلية للدالة
ج النقطة $(١ ، هـ + \frac{١}{هـ})$ صغرى محلية للدالة
د النقطة $(١ ، هـ + \frac{١}{هـ})$ عظمى محلية للدالة

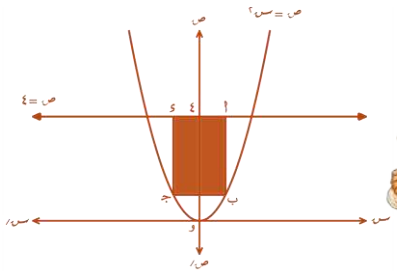
27

$\frac{ا}{(٢ جتا^{٢} س - ١)^{٢} (١ + ظا ٢ س)} وس =$ ..... + ث

أ $لو | ١ + قا ٢ س |$
ب $لو | ١ + ظا ٢ س |$
ج $لو | جتا ٢ س | + لو | ١ + ظا ٢ س |$
د $لو | جتا ٢ س - ظا ٢ س |$

الموقع الخاص بطلاب الثانوية WWW.JAWACADEMY.NET
الموقع الخاص بطلاب الستة WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

في الشكل المقابل :



28

تكون أكبر مساحة ممكنة لسطح المستطيل ا ب جـ ء = ... وحدة مساحة

أ) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

ب) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

جـ) $\frac{32\sqrt{3}}{9}$

ء) $\frac{16\sqrt{3}}{9}$

الموقع الخاص بطلاب الإعدادية WWW.JAWACADEMY.NET
الموقع الخاص بطلاب الثانوية WWW.MRAHMEDESSAM.COM
برج القبس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

دور ثاني 2022

1 في مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{٢س})^{ن}$ حسب قوى $س$ التنازلية، رتبة الحد الخالي من $س$ هي ..... (حيث $ن$ عدد صحيح موجب)

أ $٢ن + ١$ ب $٢ن$ ج $٣ن$ د $٣ن + ١$

إذا قطع المستوى :

2 $٤س + ٣ص + ٦ع = ١٢$ محاور الإحداثيات $س$، $ص$، $ع$ في النقط أ، ب، ج على الترتيب، فإن مساحة المثلث أ ب ج = ... وحدة مساحة

أ $\frac{١}{٢}\sqrt{٦١}$ ب $\sqrt{٦١}$ ج $\frac{١}{٢}\sqrt{٦١}$ د $٤\sqrt{٦١}$

3 البعد العمودي بين المستقيمين $ل_{١}$:

$\overrightarrow{ر} = (٢، -١، ٣) + ك_{١}(-٤، -٤، ٢)$ ؛

$ل_{٢}$: $\overrightarrow{ر} = (١، -١، ٢) + ك_{٢}(٢، ٢، -١)$

يساوي ..... وحدة طول

أ $\frac{\sqrt{١٧}}{٣}$ ب $\frac{\sqrt{١٧}}{٣}$ ج $\sqrt{١٧}$ د $٣\sqrt{١٧}$

4 قياس الزاوية بين المستويين :

$٢س - ٤ص + ٤ع = ٣$ ،

$٥س + ٢ع - ص = ٥$ يساوي .....

لأقرب دقيقة

أ $٩٣^{\circ}٢٩'$ ب $٨٦^{\circ}٣١'$ ج $٤٧^{\circ}٥٩'$ د $٧٤^{\circ}٥٩'$

إذا كانت $\{\overrightarrow{س}، \overrightarrow{ص}، \overrightarrow{ع}\}$ هي مجموعة يمينية من متجهات الوحدة، $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} \times ٢\overrightarrow{ص} + ٢\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} + \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع}$ فإن متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ}$ هو .....

5

أ $(\frac{-٢}{٣}، \frac{١}{٣}، \frac{٢}{٣})$ ب $(\frac{١}{٣}، \frac{٢}{٣}، \frac{-٢}{٣})$

ج $(\frac{٢}{٣}، \frac{-٢}{٣}، \frac{١}{٣})$ د $(\frac{١}{٣}، \frac{-٢}{٣}، \frac{٢}{٣})$

إذا كان $ع$ عددًا مركبًا حيث $ع = ت - ٦$ فإن الصورة المثلثية للعدد المركب $ع + ٥$ هي ..... حيث $ت^{٢} = -١$

6

أ $٢\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$)

ب $٢\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{-\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٤}$)

ج $٢\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

د $٢\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{-٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{-٣\pi}{٤}$)

معامل الحد الثالث في مفكوك $(س^{٢} + أ س + \frac{أ^{٢}}{٤})^{٤}$ هو .....

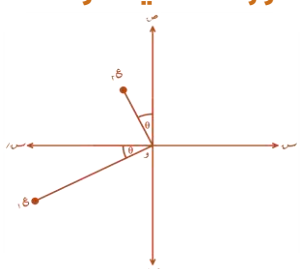
حسب قوى $س$ التنازلية حيث أ ∈ ص

7

أ $٧أ^{٢}$ ب $\frac{١}{٧}أ^{٢}$ ج $\frac{٣}{٢}أ^{٢}$ د $\frac{٢}{٣}أ^{٢}$

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بنا لطلاب الإعدادية
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بنا لطلاب الثانوية
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

8 الشكل المقابل يوضح التمثيل البياني للعددين المركبين $ع_1$ ، $ع_2$ في مستوى أرجاند إذا كان $|ع_1| = 2$ ، $|ع_2|$ فإن العدد المركب ع حيث $ع = \frac{ع_1}{ع_2}$ على الصورة المثلثية هو .....



أ) $\frac{1}{2}$ (جتا $(\frac{\pi}{2})$ + ت جا $(\frac{\pi}{2})$)

ب) 2 (جتا $(\frac{-\pi}{2})$ + ت جا $(\frac{-\pi}{2})$)

جـ) $\frac{1}{2}$ (جتا $(\frac{-\pi}{2})$ + ت جا $(\frac{-\pi}{2})$)

د) 2 (جتا $(\frac{\pi}{2})$ + ت جا $(\frac{\pi}{2})$)

9 إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(1 + س)^{ن} (1 - س + س^2)^{ن}$ متساويين فإن : $س$ = ... حيث $س \in ح$

أ) 2 ب) 1 جـ) -2 د) -1

10 المعادلات البارامترية للمستقيم الذي معادلته الإحداثية $\frac{س - 4}{3} = \frac{ص + 1}{6}$ ، $ع = 5$ هي .....

أ) $س = 3 + 4ك$ ، $ص = 5$ ، $ع = 3 - \frac{1}{2}ك$

ب) $س = 4 - 3ك$ ، $ص = 5$ ، $ع = 3 + \frac{1}{2}ك$

جـ) $س = 3 + 4ك$ ، $ص = 5$ ، $ع = 3 + \frac{1}{2}ك$

د) $س = 4 + 3ك$ ، $ص = 5$ ، $ع = -\frac{1}{2} + 3ك$

11 إذا كانت : $ع = 3$ (جتا $(\frac{\pi}{4})$ + ت جا $(\frac{\pi}{4})$)

فإن : $\frac{1}{ع}$ = ...

أ) $\frac{1}{9}ع$ ب) $\frac{1}{3}ع$ جـ) $3ع$ د) $9ع$

12 إذا كان المستقيمان : $ل_1$:

$ر = (1، -2، 3) + ك (3، ب، -ب)$

$ل_2$: $\frac{س - 2}{2} = \frac{ص - 3}{5} = ع$

متعامدين فإن : ب = ...

أ) -1 ب) 1 جـ) 2 د) 3

13 $\int \frac{د^2 س}{س + 8}$ = ...

أ) $2\sqrt{2}$ ب) $3\sqrt{2}$ جـ) 8 د) 1

14 $\int \frac{قا س \, ظا س}{3 + قا س} \, د س$ = ... + ث

أ) $\sqrt{2}$ | قا س ظا س | ب) $\sqrt{2}$ | $\frac{ظا س}{3}$ |

15 $\int س \, جا 2س \, د س$ = ... + ث

أ) $\sqrt{2}$ | ظا س | د) $\sqrt{2}$ | 3 + قا س |

أ) $-\frac{1}{2}$ س جتا 2س $-\frac{1}{4}$ جا 2س

ب) $-\frac{1}{2}$ س جتا 2س $+\frac{1}{4}$ جا 2س

جـ) $\frac{1}{2}$ س جتا 2س $+\frac{1}{4}$ جا 2س

د) $\frac{1}{2}$ س جتا 2س $-\frac{1}{4}$ جا 2س

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بنا لطلاب الإعدادية
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بنا لطلاب الثانوية
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

15 $\int$ س جا ٢ س د س = ... + ث

أ $-\frac{١}{٢}$ س جتا ٢ س $-\frac{١}{٤}$ جا ٢ س

ب $-\frac{١}{٢}$ س جتا ٢ س $+\frac{١}{٤}$ جا ٢ س

ج $\frac{١}{٢}$ س جتا ٢ س $+\frac{١}{٤}$ جا ٢ س

د $\frac{١}{٢}$ س جتا ٢ س $-\frac{١}{٤}$ جا ٢ س

16 إذا كان : س = أ قا^{٣} θ ، ص = أ ظا^{٣} θ

فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ... عندما θ = $\frac{\pi}{٤}$

حيث الثابت أ ≠ ٠

أ $\frac{٢\sqrt{٢}}{٢}$ ب $\frac{١}{٢}$ ج $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ د صفر

17 إذا كانت الدالة د : د (س) = لو جا س − لو جتا س ، حيث س ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [، فإن د$'$($\frac{\pi}{٤}$) = ...

أ صفر ب ١ ج ٢ د ٣

18 معادلة العمودي للمنحنى : $هـ^{ص}$ = س^{٢} عند النقطة الواقعة عليه و إحداثيها السيني = ١ هي .....

أ ٢ س = ٢ − ص ب ص = ٢ س − ٢

ج س = ٢ ص + ١ د ٢ ص = ١ − س

19 الدالة د : د (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} لها قيمة عظمى محلية عند النقطة .....

أ (٠ ، ٠) ب (−٢ ، ٤)

ج (٤ ، ٢) د (−٢ ، −٤)

20 إذا كانت الدالة د : د (س) دالة زوجية متصلة في الفترة [−ك ، ك] ، وكان $\int_{-ك}^{ك}$ د (س) د س = ٢ ، فإن : $\int_{-ك}^{ك}$ [د (س) − ٢ س] د س = ...

أ −٤ ب ٤ − ٤ ك^{٢}

ج ٤ د −٤ + ٤ ك^{٢}

21 مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص − ٣ = $هـ^{س}$ ومحور السينات والمستقيمان س = ٠ ، س = ١ تساوي ..... وحدة مربعة

أ $هـ$ + ٢ ب $هـ^{٣}$ ج $هـ$ + ٣ د $هـ^{٢}$

22 تتحرك نقطة على المنحنى ص^{٢} + س^{٢} + ٢ س = ٧ ، فإذا كان $\frac{د س}{د ن}$ = ٣ عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة على المنحنى ، فإن معدل تغير الإحداثي الصادي بالنسبة للزمن (ن) عند نفس النقطة = ...

أ −٤ ب −٣ ج ٣ د ٤

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بأطلاب الأولاين
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بأطلاب السنتر
ENG/AHMED ESSAM ELDIN بيدج الفيس بوك
ENG . AHMED ESSAM قناة اليوتيوب
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

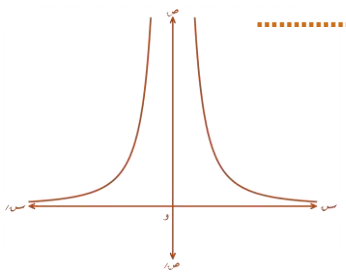
23 إذا كانت الدالة د : د (س) = لو س − (لو س)٢ ، س ∈] ٠ ، ∞ [
فإن : د′ (١) = ...

أ صفر ب ٣ جـ −٣ د −٥

24 إذا كانت د : د (س) = (س + ١) / س
فإن منحنى الدالة د يكون محدبًا لأعلى في الفترة .....

أ] ٠ ، ∞ [ب] −∞ ، ٣ [
جـ] −١ ، ∞ [د] −∞ ، ٠ [

25 الشكل المقابل يمثل منحنى المشتقة الأولى للدالة د المتصلة على ح فإن العبارة الخطأ فيما يلى هي .....



أ الدالة د لها نقطة انقلاب عند س = صفر
ب منحنى الدالة د محدب لأعلى في الفترة] −∞ ، صفر [
جـ الدالة د لها نقطة حرجة عند س = صفر
د منحنى الدالة د محدب لأعلى في الفترة] صفر ، ∞ [

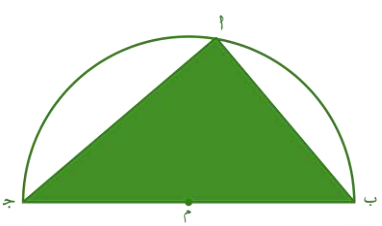
26 إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي ٤ س٣ − ١٢ س٢ ، وكان للدالة د قيمة صغرى محلية عند النقطة (٣ ، −٢٧) ، فإن :
د (١) = ...

أ −٨ ب ٣ جـ ٨ د −٣

27 مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = د (س) والذي معادلته البارامترية ص = جا θ ، س = قتا θ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = هـ تساوي ..... وحدة مربعة

أ هـ ب ١ جـ هـ٢ د ٢

28 في الشكل المقابل :



نصف دائرة طول نصف قطرها نق وحدة طول ، $\overline{ب جـ}$ قطر فيها ، فإن أكبر مساحة لسطح المثلث أ ب جـ = ... وحدة مربعة

أ $\frac{١}{٤}$ π نق٢ ب ٢ نق٢
جـ نق٢ د $\frac{١}{٢}$ π نق

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بأطلاب الأولاد
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بأطلاب البنات
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

29 إذا كانت الدالة

د : د (س) = ٣ − ٢ هـ$^{٣ س^{٢}}$ ، فإن :

الدالة تكون تناقصية في الفترة .....

أ] −∞ ، ١٢ [

ب] −١٢ ، ١٢ [

جـ] ٠ ، ∞ [

د] −∞ ، ٠ [

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الاونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

1 إذا كان المستويان :
$\overleftrightarrow{ر}$. (١، ٢، – م) = ٥،
م س + ٦ ص – ٩ ع = ١ متوازيين
فإن : م = ...

أ) – ٤ ب) – ٣ جـ) ٤ د) ٣

2 في مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{١٣}$ حسب قوى س التنازلية ، يكون مجموع معاملي الحدين الأوسطين يساوي .....

أ) $ل_{٧}^{١٣}$ ب) $ل_{٦}^{١٤}$ جـ) $ل_{٧}^{١٤}$ د) $ل_{٥}^{١٣}$

3 إذا كان مرافق العدد المركب ع هو
$\overline{ع} = -١ + \sqrt{٣}$ ت فإن الصورة المثلثية للعدد المركب ع هي .....

أ) ٤ (جتا $(\frac{-٢\pi}{٣})$ + ت جا $(\frac{-٢\pi}{٣})$)
ب) ٢ (جتا $(\frac{-٢\pi}{٣})$ + ت جا $(\frac{-٢\pi}{٣})$)
جـ) ٢ (جتا $(\frac{٢\pi}{٣})$ + ت جا $(\frac{٢\pi}{٣})$)
د) ٤ (جتا $(\frac{٢\pi}{٣})$ + ت جا $(\frac{٢\pi}{٣})$)

4 إذا كان ا ب جـ د متوازي أضلاع
حيث : ا (٢، ٣، –١)، ب (٠، ٥، ٣)
جـ (–٢، –٣، ١) فإن الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم $\overleftrightarrow{جـ د}$ هي .....

أ) $\overleftrightarrow{ر}$ = (–٢، –٣، ١) + ك (–١، ١، ٢)
ب) $\overleftrightarrow{ر}$ = (–٢، –٣، ١) + ك (٢، ٣، –١)
جـ) $\overleftrightarrow{ر}$ = (–٢، –٣، ١) + ك (٠، ٥، ٣)
د) $\overleftrightarrow{ر}$ = (–٢، ٢، ٤) + ك (–٢، –٣، ١)

5 إذا كانت المتجهات :
$\overrightarrow{أ}$ = م $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ – ٢ $\overrightarrow{ع}$،
$\overrightarrow{ب}$ = ك $\overrightarrow{ص}$ + ٥ $\overrightarrow{ع}$، $\overrightarrow{جـ}$ = ن $\overrightarrow{ع}$ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة في متوازي السطوح الذى حجمه يساوي ٤٠ وحدة مكعبة فإن : م ك ن = ± ....

أ) ١٠ ب) ٤٠ جـ) ٢٠ د) ٨٠

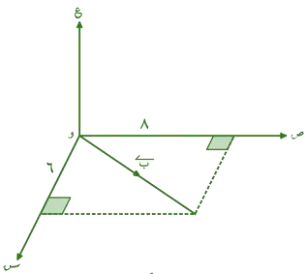
6 إذا كانت : ١، ω، $ω^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن :
$(\frac{ا}{ω} - ا + ا ω^{٢})^{٤٧}$ = ... حيث ا ≠ صفر

أ) $ا^{٤}$ ٨ ب) $ا^{٤}$ ١٦ جـ) $ا^{٤}$ ٦ د) $ا^{٤}$ ٢

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

7

إذا كان الشكل المقابل

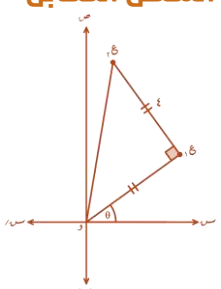


يمثل المتجه $\overrightarrow{ب}$، وكان المتجه $\overrightarrow{أ}$ = (٣، ٤، ١٢) فإن : $||\overrightarrow{أ ب}||$ = ... وحدة طول

أ ٥ ب ١٣ جـ ١٢ د ١٠

8

إذا كان الشكل المقابل



يوضح العددين المركبين ع١، ع٢ في مستوى أرجاند فإن : $\frac{ع_1}{ع_2}$ = ...

أ $٤ هـ^{-\frac{\pi}{٤} ت}$ ب $٢\sqrt{٢} هـ^{-\frac{\pi}{٤} ت}$

جـ $٤ هـ^{\frac{\pi}{٤} ت}$ د $٢\sqrt{٢} هـ^{\frac{\pi}{٤} ت}$

9

إذا كان الحد السابع في مفكوك $(\frac{م}{س^{٢}} - \frac{س^{٢}}{م})^{٣}$ حسب قوى س التصاعدية هو الحد الخالي من س (حيث م عدد حقيقي موجب) فإن قيمة هذا الحد = ...

أ -١٢ ب ٩٢٤ جـ ٤ م د $-٩٢٤ م^{١٢}$

10

إذا كان :

ع = ٤ (جا $\frac{\pi}{٦}$ − ت جتا $\frac{\pi}{٦}$)

حيث $ت^{٢} = -١$ فإن أحد الجذريين التربيعيين للعدد ع هو .....

أ $\sqrt{٣} + ت$ ب $\sqrt{٣} + ٢ ت$

جـ $\sqrt{٣} - ت$ د $\sqrt{٣} - ٢ ت$

11

معادلة المستوى الذي يحتوي المستقيم الذي معادلته : س = ص = $\frac{١}{٢}$ ع ويمر بالنقطة (١، ٢، ٣) هي .....

أ $\overrightarrow{ن}$. (١، −١، −١) = صفر

ب س + ٢ ص + ٣ ع = صفر

جـ س − ص + ع = صفر

د $\overrightarrow{ن}$. (١، ١، −١) = صفر

12

إذا كان : $ح_{١٥}$ هو الحد الأوسط في مفكوك $(\sqrt{أ س} - \frac{١}{\sqrt{أ س}})^{ن+٣}$ حسب قوى س التنازلية، فإن : معامل $ح_{١٦}$ = ... عند أ = $\frac{١}{٢}$

أ $-٤ \times ٢^{٢٨} ق_{١٣}$ ب $٤ \times ٢^{٢٨} ق_{١٣}$

جـ $-٤ \times ٢^{٢٦} ق_{١٥}$ د $٤ \times ٢^{٢٦} ق_{١٥}$

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بنا لطلاب الإعلانات
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر
ENG/AHMED ESSAM ELDIN بيدج الفيس بوك
ENG . AHMED ESSAM قناة اليوتيوب
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

13 $\int \frac{1}{س} \, د س$ = ... + ث

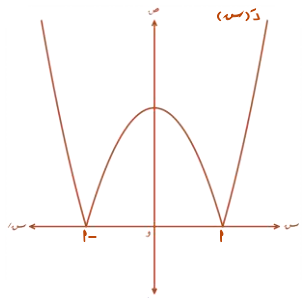
أ) لو س [١ - لو $\frac{1}{س}$] ب) $\frac{1}{س}$ [لو $\frac{1}{س}$ - ١]

ج) س [١ + لو $\frac{1}{س}$] د) $\frac{1}{س}$ [١ + لو $\frac{1}{س}$]

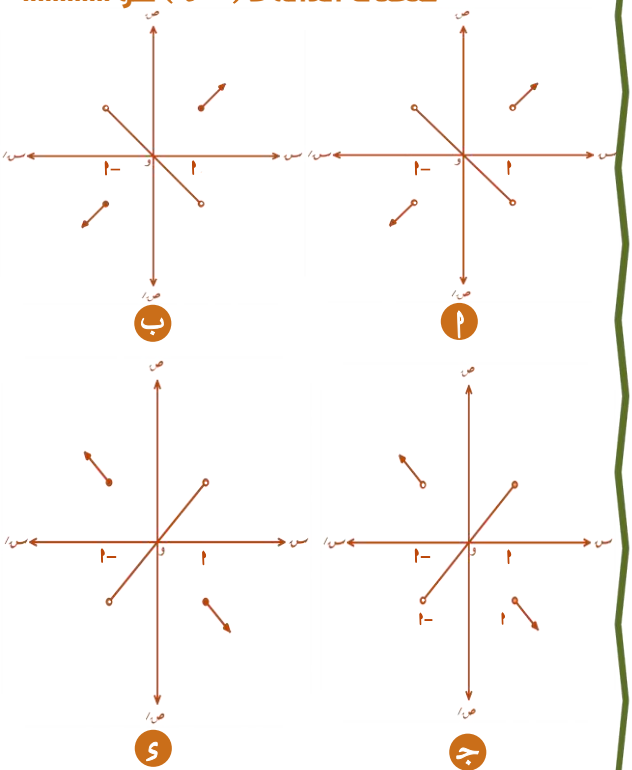
14 إذا كانت د (٢ س) = $س^{هـ}$،
فإن د' (٢) = ...

أ) $\frac{1}{2}$ هـ ب) ٢ هـ ج) هـ د) $\frac{2}{هـ}$

15 إذا كان الشكل المقابل يمثل
منحنى الدالة د' (س) :



فإن الشكل الذي يمكن أن يمثل
منحنى الدالة د' (س) هو .....



16 إذا كان منحنى الدالة : ص = أ $هـ^{س^{ب}}$
حيث أ ، ب ثابتان له نقطة انقلاب
هي (١ ، ١) ، فإن : أ ب = ...

أ) {صفر ، ٢ هـ} ب) {-٢ هـ}

ج) {-٢ هـ} د) {صفر}

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى الدالة :

17

ص = د (س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي (قا س ظتا س)، وكان المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{-١}{٨}$) فإن المنحنى يقطع محور الصادات عند النقطة .....

أ (صفر، $\frac{-١}{٤}$)　　ب (صفر، $\frac{١}{٤}$)

جـ (صفر، $\frac{١}{٢}$)　　د (صفر، صفر)

18

إذا كان : $\int_{ل}^{ل} \sqrt{ك + س}$ د س = $\frac{٢}{٣}$

فإن : ك = ...

أ ٢　　ب $\frac{-١}{٢}$　　جـ $\frac{١}{٢}$　　د −١

19

منحنى الدالة : س ص = هـ^{س} له قيمة صغرى محلية هي ص = ...

أ −هـ　　ب هـ　　جـ ١　　د −١

24

إذا كان : $\int_{٢}^{٤}$ د (س) د س = ن،

$\int_{٤}^{٢}$ ر (س) د س = م، فإن :

$\int_{٢}^{٤}$ [د (س) − ٢ ر (س) + ١] د س = ...

أ ن − ٢ م + ٢　　ب ن − ٢ م + ١

جـ ن + ٢ م + ١　　د ن + ٢ م + ٢

20

$\int \frac{٢ \text{ جتا}^{٣} س - \text{جتا } س}{\text{جا } س - ٢ \text{ جا}^{٣} س}$ د س = ... + ث

أ لو | ظتا س |　　ب لو | جا س |

جـ − لو | جتا س |　　د − لو | جا س |

21

معادلة المماس للمنحنى : ص = س + لو جتا س عند النقطة الواقعة على المنحنى و إحداثيها السيني يساوي صفرًا هي .....

أ ص = س　　ب ص + س = صفر

جـ ص = صفر　　د س = صفر

22

كرة من المعدن طول نصف قطرها ن سم تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها، فإذا كان معدل تغير حجم الكرة بالنسبة للزمن في لحظة ما يساوي ٨ ن سم^{٣} /ث فإن معدل تغير مساحة سطح الكرة بالنسبة للزمن عند هذه اللحظة يساوي ..... سم^{٢} / ث

أ ١٦ π　　ب ٨ π　　جـ ١٦　　د ٨

WWW.JAWACADEMY.NET　WWW.MRAHMEDESSAM.COM　ENG/AHMED ESSAM ELDIN　ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK　موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

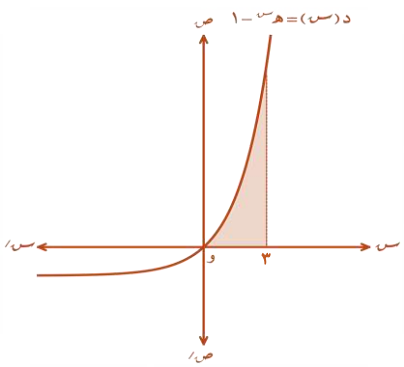
إذا كان المستقيم ص = م س – ٢
مماسًا للمنحنى : $س^{٣} + ص^{٢} = ٥$ عند
النقطة (١ ، ٢) فإن : م = ...

أ $-\frac{٣}{٤}$ ب $\frac{٣}{٤}$ جـ $\frac{٤}{٣}$ د $-\frac{٤}{٣}$

إذا كان د (س) = $\frac{١}{س}$ $هـ^{|س|}$
فإن القيمة العظمى المحلية
للدالة د تساوي .....

أ ١ ب هـ جـ – هـ د –١

في الشكل المقابل :



إذا كانت المساحة المظللة تساوي
($أ^{٣}$ – ٤) وحدة مربعة ، فأوجد قيمة أ

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

دور ثانٍ 2023

1 إذا كانت السعة الأساسية للعدد المركب ع تساوي $(\frac{\pi}{6})$ ومقياسه ١ وحدة طول، فإن العدد المركب ع على الصورة الجبرية هو .....

أ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ت
ب $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ت
جـ $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ت
د $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ت

2 إذا كانت $\overrightarrow{أ} = (م، -3، 1)$، $\overrightarrow{ب} = (1، 0، -2)$، $\overrightarrow{جـ} = (-2، -1، 4)$ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة في متوازي سطوح حجمه يساوي ٧ وحدات مكعبة، فإن : م = ...

أ -4 أو ٣
ب -3 أو ٤
جـ ٢ أو -2
د ٥ أو -1

3 قياس الزاوية المحصورة بين المستويين : $س + ع - 7 = 0$، $3(س - 1) - 6(ص - 2) + 6(ع + 1) = 0$ يساوي .....°

أ ٣٠
ب ٤٥
جـ ٦٠
د ٩٠

4 إذا كان ع عددًا مركبًا، ω هي أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح، $ع(1 - \omega - \omega^2) = \frac{2}{\omega + 1}$، فإن : ع = ...

أ $-\omega$
ب $1 + \omega$
جـ $1 - \omega^2$
د ω

5 معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (١، -2، ٤) ويوازي المستقيم : $س = 2 + 3ك$، $ص = 3 - ك$، $ع = -1 + 4ك$ هي .....

أ $\frac{س-1}{2} = \frac{ص+2}{3} = \frac{ع-4}{-1}$
ب $\frac{س+1}{3} = \frac{ص-2}{-1} = \frac{ع+4}{4}$
جـ $\frac{س-1}{3} = \frac{ص+2}{-1} = \frac{ع-4}{4}$
د $\frac{س-1}{-3} = \frac{ص+2}{1} = \frac{ع-4}{-1}$

6 إذا كان : $ع_1$، $ع_2$ عددين مركبين، حيث : $ع_1 = هـ^{3 + \frac{\pi}{2}ت}$، $ع_2 = هـ^{3 - \frac{\pi}{2}ت}$، فإن : $\frac{ع_1}{ع_2}$ = ...

أ ت
ب ١
جـ $-$ ت
د -1

7 إذا كان : $ع = \frac{2 + 4ت}{2 - ت}$ حيث : $ت^2 = -1$ فإن الصورة المثلثية للعدد المركب $ع^6$ = ...

أ $64(جتا\frac{\pi}{2} + ت جا\frac{\pi}{2})$
ب $64(جتا\pi + ت جا\pi)$
جـ $32(جتا\pi + ت جا\pi)$
د $32(جتا(-\frac{\pi}{2}) + ت جا(-\frac{\pi}{2}))$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

8 عدد الحدود في مفكوك $(س^{٢} - ٦ س + ٩)^{٢١}$ تساوي ..... حدًا

أ ٤٣ ب ٤٢ ج ٢٢ د ٢١

9 في مفكوك $(١ + س)^{١٧}$ حسب قوى $س$ التصاعدية إذا كان معامل $ح_{ر+٣}$ = معامل $ح_{ر+٤}$ حيث $ر \neq ١$، فإن : قيمة $|ر|$ = ...

أ ٧٢٠ ب ١٢٠ ج ٢٤ د ٦

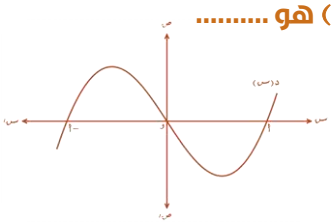
10 المستقيم الذي معادلته : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ٢}{٣} = \frac{ع - ١}{٤}$

يقطع المستوى الذي معادلته : $٢ س + ص - ع = ٥$ في النقطة .....

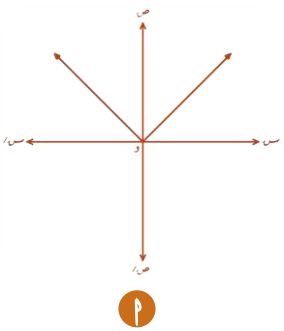
أ (٢، ٣، ٩) ب (٥، ٤، ٩)

ج (٥، −٢، ٩) د (٥، ٤، ٥)

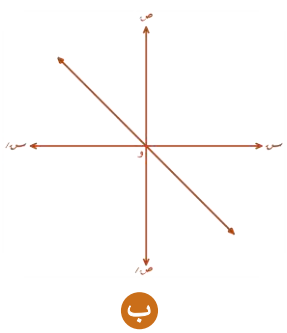
11 إذا كان الشكل المعطى يمثل منحنى الدالة د ($س$) فإن الشكل الذي يمكن أن يمثل منحنى الدالة دً ($س$) هو .....



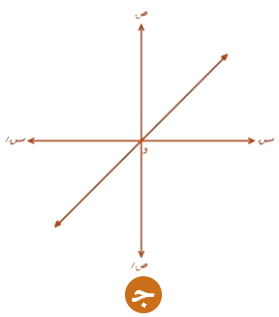
أ



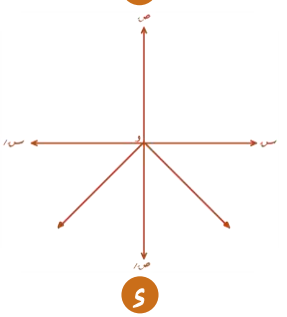
ب



ج



د



12 إذا كان : $هـ_{د}(س) = س^{٢} - ١$ فإن

دَ ($\sqrt{٢}$) = ...

أ $٢\sqrt{٢}$ ب $-٢\sqrt{٢}$ ج $٢\sqrt{٢^{٧}}$ د $٢\sqrt{٢}$ هـ

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

13 إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة : ص = د (س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي (−٦ جتا^{٥} س جا س) ، وكان المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، صفر) فإن : ص = ...

أ − جتا^{٦} س
ب جتا^{٦} س
ج $\frac{١}{٦}$ جتا^{٦} س
د $-\frac{١}{٦}$ جتا^{٦} س

14 الدالة د : د (س) = | س − ٣ | تكون .....

أ تناقصية في الفترة] −∞ ، ٣ [
ب تناقصية في الفترة] ٣ ، ∞ [
ج تزايدية في الفترة] −∞ ، ٣ [
د تزايدية في الفترة] ٣− ، ∞ [

15 إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{٢}$ (س^{٢} + ١)^{٣} − ٢ فإن الدالة د نقطة حرجة عند س = ...

أ هـ^{٢}
ب −١
ج صفر
د ١

16 إذا كانت : د (س) = س + $\frac{س}{س - ١}$ فإن للدالة د قيمة صغرى محلية عندما س = ...

أ −٢
ب −١
ج صفر
د ٢

17 إذا كان : $\int_{-٢}^{أ}$ (٥ س^{٤} − جا س) د س = $\int_{٠}^{أ}$ ٤ ك س^{٣} د س ، فإن ك = ...

أ ٤
ب −٤
ج ٢
د −٢

18 $\int \frac{١ - ٢ جا^{٢} س}{٢ جا س جتا س}$ د س = ... + ث

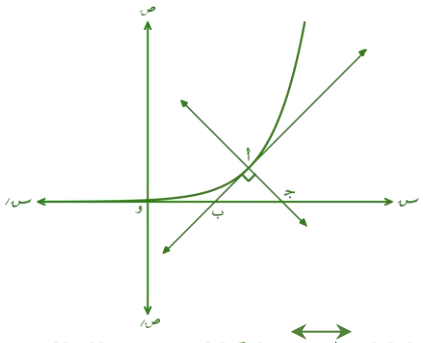
أ $\frac{١}{٢}$ لو | جتا ٢ س |
ب ٢ لو | جا ٢ س |
ج $\frac{١}{٢}$ لو | جا ٢ س |
د −٢ لو | جتا ٢ س |

19 مكعب من الثلج طول حرفه ل سم يذوب بانتظام محافظًا على شكله ، فإذا كان معدل تناقص مساحة سطحه الكلية بالنسبة للزمن في لحظة ما يساوي $\frac{٢٤}{ل}$ سم^{٢}/ث فإن معدل تغير حجمه عند هذه اللحظة يساوي ..... سم^{٣}/ث

أ −١٢
ب −٦
ج −٦ ل
د −١٢ ل

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

في الشكل المقابل :



إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا لمنحنى الدالة

د : د (س) = $٨ س^{-٣}$ عند النقطة

أ (٣ ، ١) فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أجـ}$

هي .....

أ ص = ٢ + س ب ص = س − ٢

جـ ص = − س − ٤ د ص = ٤ − س

إذا كان ص = ٣ س − $س^{٤}$ فإن أكبر

قيمة للمقدار : ص + س تساوي

.....

أ −٤ ب −٢ جـ ٢ د ٣

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بأطلاب الأولاين
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بأطلاب الأستاذ
ENG/AHMED ESSAM ELDIN بروفيل الفيس بوك
ENG . AHMED ESSAM قناة اليوتيوب
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

دور أول 2024

1 إذا كانت ١، ω، ω^{٢} هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح، فإن $\frac{١}{ω} - ω + ١ =$ .....

أ $-٢ω$ ب $-٢ω^{٢}$ ج $٢ω^{٢}$ د $٢ω$

2 إذا كانت : جـ (٣، ٠، ل − ١) هي نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٣، ٤، ٥)، ب (٣، −٤، ٥) فإن :

ل = ...

أ -٦ ب -٤ ج ٤ د ٦

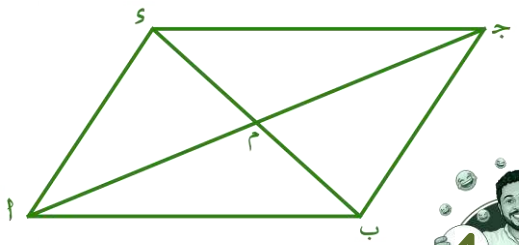
3 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٥، ١، −٢)، (٢، ٤، ٠) عموديًا على المستقيم الذى معادلته

$\vec{ر} = (١، ٢، ٣) + ك (٠، م، ١)$

فإن : م = ...

أ $-\frac{٣}{٢}$ ب $-\frac{٢}{٣}$ ج $\frac{٢}{٣}$ د $\frac{٣}{٢}$

في الشكل المقابل :



4 أ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في نقطة م، فإذا كان

|| $\vec{أجـ} \times \vec{بد}$ || = ٢٤ وحدة مربعة، فإن:

|| $\vec{مب} \times \vec{مجـ}$ || = ...وحدة مربعة

أ ٣ ب ٤ ج ٦ د ١٢

5 في مفكوك $(٢ + س)^{١٠}$ مجموع معاملات الحدود التي تشتمل على $س^{ك}$ حيث تقبل القسمة على ٤ يساوي .....

أ ١٣٦٢٠ ب ١٣٦٢٢ ج ١٤٦٤٤ د ١٥٩٠٤

6 إذا كانت :

ع = ٦ (جتا $(\frac{-٥π}{٤})$ + ت جا $(\frac{-٥π}{٤})$)

فإن السعة الأساسية للعدد المركب

ع = ...

أ $-\frac{π}{٤}$ ب $-\frac{٣π}{٤}$ ج $\frac{٣π}{٤}$ د $\frac{π}{٤}$

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بنا لطلاب الإعدادية
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بنا لطلاب الثانوية
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

7 إذا كانت قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هي $(\theta، \frac{\pi}{2}، \frac{\pi}{4})$ فإن إحدى قيم θ هي .....

أ $\frac{\pi}{2}$ ب $\frac{\pi}{3}$ ج $\frac{\pi}{4}$ د $\frac{\pi}{6}$

8 إذا كان : $ع = ٨ هـ^{\frac{\pi}{2} ت}$ ، فإن أحد الجذور التكعيبية للعدد المركب ع هو .....

أ $\sqrt[3]{٣ + ت}$ ب $\sqrt[3]{٣ - ت}$

ج $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt[3]{٣}}{٢} ت$ د $\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt[3]{٣}}{٢} ت$

9 طول العمود المرسوم من النقطة $(٠، ١٢، ٠)$ على المستوى الذي يمر بالنقطة $(١، ٠، ٢)$ وعموديًا على المستقيم الذي معادلته $\overrightarrow{ر} = (٢، ٥، ٦) + ك (-٣، -٤، ٠)$ يساوي ..... وحدة طول

أ ٥ ب $\frac{٣٣}{٥}$ ج ٩ د $\frac{٥١}{٥}$

10 في مفكوك $(أ + س)^{ن}$ إذا كان الحد الخالي من $س$ ومعامل $س$ هما ٨، ٢٤ على الترتيب فإن : $أ : ن =$ .....

أ ١ : ٣ ب ١ : ٣ ج ١ : ٢ د ١ : ٢

11 معادلة الخط المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

$ل_١ : \frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ١}{٣} = \frac{ع - ١}{٤}$

$ل_٢ : \overrightarrow{ر} = (١، -١، -١) + ك (-٢، ١، ٣)$ ويوازي الخط المستقيم:

$\frac{٢س + ٢}{٤} = \frac{ص - ٥}{٣} = \frac{١ - ع}{-٣}$

هي .....

أ $\overrightarrow{ر} = (١، -١، -١) + ك (٢، ٣، ٣)$

ب $\overrightarrow{ر} = (٢، ٣، ٣) + ك (١، -١، -١)$

ج $س = ١ + ٣ ك$ ، $ص = -١ + ٢ ك$ ، $ع = -١ - ٣ ك$

د $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص + ١}{٣} = \frac{ع - ١}{٣}$

12 إذا كانت : $ع_١ = ١ + \sqrt[3]{٣} ت$ ،

$ع_٢ = ٤ (جتا (\frac{-\pi}{٣}) + ت جا (\frac{-\pi}{٣}))$

فإن : $\frac{ع_٢}{ع_١} =$ .....

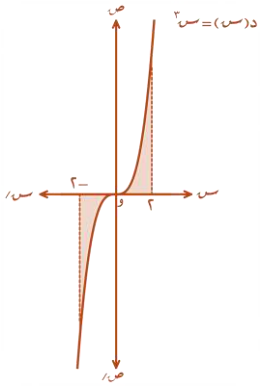
أ $٢ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$ ب $\frac{١}{٢} هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$

ج $\frac{١}{٢} هـ^{\frac{-\pi}{٣} ت}$ د $٢ هـ^{\frac{-\pi}{٣} ت}$

13 إذا كان : $\overrightarrow{هـ_١}$ ، $\overrightarrow{هـ_٢}$ متجهي اتجاهين لمستقيمين متقاطعين في نقطة أ $(٣، ٤، ٥)$ حيث : $\overrightarrow{هـ_١} \times \overrightarrow{هـ_٢} = (٢، ٦، -٣)$ فأوجد الصورة العامة لمعادلة المستوى الذي يحوي هذين المستقيمين

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بأكاديمية الجواب
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بأ/ أحمد عصام
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

في الشكل المقابل :



14

مساحة الجزء المظلل = ...

وحدة مربعة

أ ٨ ب ٤ ج ٢ د صفر

15

إذا كان : ٦ = ٢ د(س) + س ، فإن

ميل المماس للمنحنى :

ص = د (س) عندما س = ٥

يساوي .....

أ لو هـ ب – لو هـ ج – لو ٢ د لو ٢

16

الدالة د :

د (س) = $\frac{١}{٣}$ س٣ – س٢ – ٣ س لها

قيمة عظمى محلية عند النقطة

.....

أ (١ ، – $\frac{١١}{٣}$) ب (٣ ، – ٩)

ج (– ٣ ، – ٩) د (– ١ ، $\frac{٥}{٣}$)

17

معادلة العمودي على المنحنى :

س = ن٢ ، ص = ٦ ن – ٥ عند ن = ١

هي .....

أ ٤ ص + س – ٥ = ٠ ب ٣ س + ص – ٤ = ٠

ج ٣ ص + س – ٤ = ٠ د ٤ س + ص – ٥ = ٠

18

إذا كان ميل المماس للمنحنى :

ص = د (س) عند أي نقطة عليه

(س ، ص) يساوي ٢ هـ٢س – ١ وكان :

د (١) = ٤ هـ ، فإن : د ($\frac{١}{٢}$) = ...

أ ١ + ٣ هـ ب ٣ هـ ج ٢ هـ د ١ – هـ

19

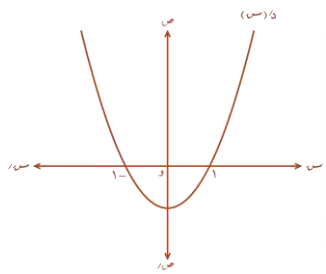
$\int \frac{١}{س^{٢}}$ لو $\frac{١}{س}$ د س = ... + ث

أ $\frac{١}{٢}$ (لو س)٢ ب – ٢ (لو س)٢

ج ٢ (لو س)٢ د – $\frac{١}{٢}$ (لو س)٢

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

20 الشكل المقابل :



يمثل منحنى د`(س) للدالة د المتصلة على ح فأي من العبارات الآتية صحيحة ؟

أ الدالة د لها مماس أفقي عند س = صفر

ب الدالة د تناقصية في الفترة] -١، ١ [

ج الدالة د لها قيمة عظمى محلية عند س = ١

د الدالة د لها قيمة صغري محلية عند س = -١

21 إذا كانت د (س) دالة فردية متصلة على الفترة [-٤، ٤] وكان : $\int_{-4}^{-2} د(س)\,ى س = -١٢$، فإن : $\int_{-2}^{4} د(س)\,ى س$ = ...

أ ١٢- ب ٤- ج ٤ د ١٢

22 إذا كانت د دالة بحيث د`(س) = ١ - $\frac{٤}{س^{٢}}$ ، فإن منحنى الدالة د يكون محدبًا لأسفل في الفترة .....

أ] -∞، ٠ [ب] -∞، -٢ [

ج] -∞، ٢ [د] ٠، ∞ [

23 صفيحة من المعدن على شكل قطاع دائري تتمدد بانتظام بحيث يظل طول قوسه مساويًا لطول نصف قطر دائرته، فإذا كان معدل زيادة مساحة سطح الصفيحة هو ٢ سم٢/ث فإن معدل تغير طول قطر دائرته يساوي ..... سم /ث عند اللحظة التي يكون فيها طول القطر ١٠ سم

أ $\frac{٤}{٥}$ ب $\frac{٣}{٥}$ ج $\frac{٢}{٥}$ د $\frac{١}{٥}$

24 إذا كانت : ع = س فأوجد : أصغر قيمة للمقدار (ع - $\sqrt{س}$)

25 استخدم التكامل بالتعويض لإيجاد : $\int$ (س + ١) (س - ١)^{٧} ى س

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بأطلاب الأولاين
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بأطلاب السنتر
ENG/AHMED ESSAM ELDIN بيدج الفيس بوك
ENG . AHMED ESSAM قناة اليوتيوب
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

1 إذا كانت سعة العدد المركب ع هي $\frac{\pi}{٣}$ فإن سعة العدد المركب $ع^{٣}$ هي .....

أ $\frac{\pi}{٩}$ ب $\frac{\pi}{٦}$ ج π د $\pi ٢$

2 إذا كانت :

أ (٢م − ١، ٣م، ٢م + ١)،

ب (٣ − ٢م، ٤ − ٣م، ٥ − ٢م) فإن إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$ هي .....

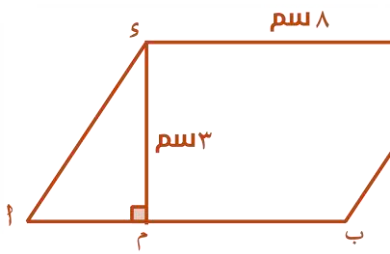
أ (١، ٣، ٦) ب (١، ٢، ٣)

ج (٥، ٤، ٣) د (١، ٤، ٦)

3 إذا كان أ $س^{-٣}$ هو أحد حدود مفكوك $(س^{٢} + \frac{٢}{س^{٣}})^{١١}$، فإن : أ = ...

أ ١٨٤٨ ب ٣٦٩٦ ج ١٤٧٨٤ د ٢٩٥٦٨

4 في الشكل المقابل :



أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه :

$\overline{دم} \perp \overline{أب}$، إذا كان دم = ٣ سم،

دجـ = ٨ سم، فإن :

$||\overline{أب} \times \overline{أد}||$ = ... $سم^{٢}$

أ ٤٨ ب ٢٤ ج ١٢ د ٦

5 إذا كانت قياسات زوايا الاتجاه لمتجه : $\overrightarrow{أ}$ هي (٩٠°، ٦٠°، θ) فإن إحدى قيم θ هي .....

أ ٩٠° ب ١٢٠° ج ١٣٥° د ١٥٠°

6 إذا كان : ع = ك (جا $\frac{\pi}{٤}$ + جتا $\frac{\pi}{٤}$) حيث ك ∈ ح فإن السعة الأساسية للعدد المركب ع تساوي .....

أ $-\frac{\pi ٣}{٤}$ ب $-\frac{\pi}{٤}$ ج $\frac{\pi}{٤}$ د $\frac{\pi ٣}{٤}$

7 إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ٠، أ) على المستوى $س ص$: (١، ٢، −١) = ٢ يساوي $\sqrt{٦}$ وحدة طول فإن : أ = ± .....

أ ٦ ب $\sqrt{٦}$ ج $٢\sqrt{٦}$ د ١

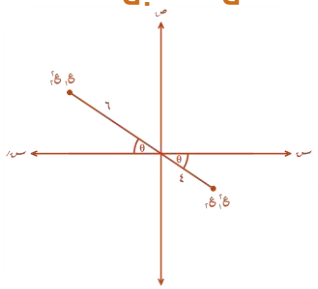
8 إذا كان العدد المركب ع = $\sqrt{٣} - ٣$ ت فإن أحد الجذور التكعيبية للعدد المركب ع هو .....

أ $\sqrt{١٢}$ هـ $^{\frac{٥\pi}{٩}}$ ت ب $\sqrt{١٢}$ هـ $^{\frac{\pi}{٢}}$ ت

ج $\sqrt{١٢}$ هـ $^{\frac{٥\pi}{٩}}$ ت د $\sqrt{١٢}$ هـ $^{\frac{-\pi}{٢}}$ ت

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

9 في الشكل المقابل :



إذا كان (ع١ ، ع٢) ، (ع١ ، ع٢) عددين مركبين ممثلين على مستوى أرجاند فإن : ع١ / ع٢ = ...

أ ٢/٣ هـ^(-π/٢ ت)
ب ٢/٣ هـ^(π ت)
ج ٣/٢ هـ^(π ت)
د ٣/٢ هـ^(-π/٢ ت)

10 معادلة الخط المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ل١ :

(س - ١)/٥ = (ص + ١)/٦ = (ع - ١)/٤ ،

ل٢ : ر = (١ ، -١ ، -١) + ك (-٥ ، ٢ ، ٣)

وعمودي على المستوى الذي معادلته س - ٢ ص + ٣ ع = ٥ هي .....

أ س = ١ + ك ، ص = -١ + ٢ ك ، ع = -١ + ٣ ك

ب ر = (-١ ، -٢ ، ٣) + ك (١ ، -١ ، -١)

ج ر = (١ ، -١ ، -١) + ك (-١ ، -٢ ، ٣)

د (س + ١)/٢ = (ص + ١)/-١ = (ع + ١)/٣

11 أوجد الصورة العامة لمعادلة المستوى الذي يمر بالنقطة (١ ، ١ ، ١) والعمودي على المستقيم الذي معادلته :

س/٣ = ص/٢ = ع/٣

12 إذا كان : س = ٢ ن^٢ + ١ ، ص = ٤ ن^٣

فإن د ص / د س = ... عندما س = ٨

أ ٨ ب ٢ ج ٤ د ١

13 المساحة المحصورة بين المنحنى :

ص = √س والمستقيمين ص = ٠ ،

س = ٤ تساوي ..... وحدة مربعة

أ ١٦/٣ ب ٨/٣ ج ٤/٣ √٢ د ٨/٣ √٢

14 إذا كان د'(س) = ٢ س - ٨ فإن الدالة د تكون تزايدية في الفترة ....

أ] -∞ ، ٤ [ب] ٤ ، ∞ [

ج] -∞ ، ∞ [د] -٤ ، ٤ [

15 القيمة الصغرى المحلية لمنحنى الدالة د (س) = س^٣ + أ س حيث أ ثابت عند النقطة الواقعة عليه والتي إحداثيها السيني يساوي ٣ هي .....

أ -١٢ ب -٩ ج صفر د ٢

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

16 إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = د (س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي ٢ س – ٢

وكان : د (١) = ٢ ، فإن :

د (٠) = ...

أ ٣ ب ١ ج –١ د –٢

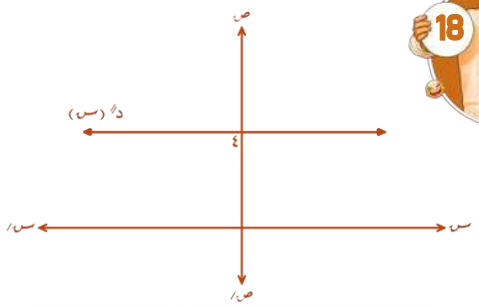
17 أ جا س قا س ظا س قا س د س

= ..... + ث

أ ٢ظا قا٢ س ب $\frac{1}{2}$ (ظا قا٢ س)

ج $\frac{1}{2}$ (ظا قا س)٢ د ٢ظا قا س

18 إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د′(س) ، فأي من العبارات الآتية صحيحة ؟



أ الدالة لها نقطة انقلاب عند س = صفر

ب منحنى الدالة د محدب لأعلى في الفترة] –∞ ، ٠ [

ج الدالة د لا يوجد لها قيمة عظمى محلية

د منحنى الدالة د محدب لأعلى في الفترة] ٠ ، ∞ [

19 إذا كانت : ص = هـ^س + ص ، فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

أ $\frac{ص}{1 - ص}$ ب $\frac{1}{1 - ص}$

ج $\frac{1}{ص - 1}$ د $\frac{ص}{ص - 1}$

20 إذا كان د دالة فردية متصلة على الفترة [–٦ ، ٦] ،

$\int_{-٦}^{٦}$ د (س) د س = ٧ ، فإن :

$\int_{-٦}^{٤}$ [د (س) + س] د س = ...

أ –١٧ ب –٣ ج ٣ د ١٧

21 إذا كانت : د (٢ س + ١) = جا ٢ س ، فإن : د′(١) = ...

أ –٨ ب –١ ج ١ د ٨

22 إذا كان منحنى الدالة د يمر بنقطة الأصل وكان :

د′(س) = $\frac{1}{2}$ س٢ + ٣ س فإن نقطة الانقلاب لمنحنى الدالة د هي .....

أ (–٣ ، ١٢) ب (–٦ ، ١٨)

ج (٠ ، ٠) د (–٣ ، ٩)

إذا كانت النقطة (س ، ص) تتحرك على المنحنى ص = د (س) وكان الإحداثي السيني لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات / ثانية و الإحداثي الصادي يتزايد بمعدل ٤ وحدات /ثانية ، فإن قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى عند هذه النقطة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي ..... لأقرب درجة

أ ٥١° ب ٥٣° ج ١٢٧° د ١٢٩°

ثلاثة أعداد موجبة مجموعها ١٢ و أكبرها ثلاثة أمثال أصغرها ، أوجد هذه الأعداد ليكون حاصل ضربها أكبر ما يمكن

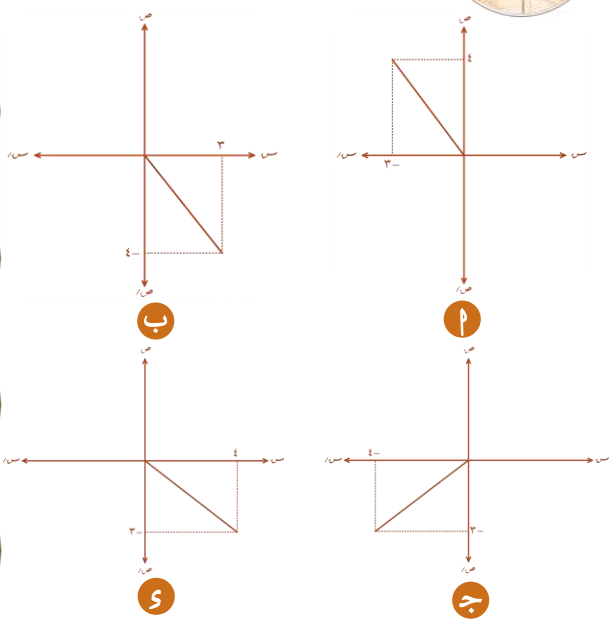
استخدم التكامل بالتعويض لإيجاد:

$\int (س (س - ٤)^{٩}) د س$

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بنا لطلاب الأونلاين WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

دور أول 2025

1 إذا كان ع = ٣ + ٤ ت عددًا مركبًا، فإن الشكل الذى يمثل العدد المركب (−ع) هو .....



2 في مفكوك (١ + ٣ س)^{ن} حسب قوى س التصاعدية، إذا كانت النسبة بين معامل ح$_{٨}$ ومعامل ح$_{٧}$ تساوي ٦ : ٧ فإن ٦ ن = ...

أ ٤٢ ب ٤٨ جـ ١٢٠ د ٣٦٠

3 قياس الزاوية بين المستويين :

س − ٤ ص + ٣ ع − ٧ = ٠

، ٢ س + ٢ ص + ٢ ع + ٥ = ٠

يساوي .....

أ ٩٠° ب ٦٠° جـ ٣٠° د صفر°

4 إذا كانت قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هي (٤٥°، ١٢٠°، ٦٠°)، فإن جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{٥أ}$ هي .....

أ $(-\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{١}{٢}، -\frac{١}{٢})$ ب $(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{١}{٢}، -\frac{١}{٢})$

جـ $(-\frac{\sqrt{٢}}{٢}، -\frac{١}{٢}، \frac{١}{٢})$ د $(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{١}{٢}، -\frac{١}{٢})$

5 إذا كان د$'$ (س) = $\frac{١}{٢}$ (هـ^{س} + $\frac{١}{هـ^{س}}$) ، وكان د$'$ (٠) = ٠ ، د (٠) = ١ ، فإن : د (س) = ...

أ د$'$ (س) ب د (س)

جـ − د$'$ (س) د − د (س)

6 إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند أي نقطة واقعة (س ، ص) يساوي $\frac{٣س^{٢}+٢}{س}$ وكان د (هـ) = ٣ هـ + ٥ ، فإن معادلة المنحنى هي ص = ...

أ ٣ س + ٢ لو|س| + ٣

ب ٣ س + لو|س| + ٤

جـ ٣ س + ٣ لو|س| + ٢

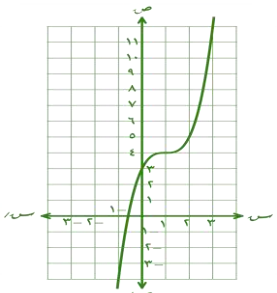
د ٣ س + ٤ لو|س| + ١

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

7 إذا كان $هـ^{ص} = س^{س}$،
فإن $س^{س}$ ص$'$ = ...

أ ٢ ب ١ ج $\frac{١}{٢}$ د صفر

8 إذا كان الشكل المقابل :



يمثل منحنى د$'$(س) الدالة كثيرة
حدود حيث -١ ≤ س ≤ ٣، فإن
منحنى الدالة د (س) .....

أ ليس له نقطة انقلاب
ب له نقطة انقلاب واحدة
ج له نقطتان انقلاب
د له ثلاث نقط انقلاب

9 إذا كان مفكوك $(س^{٣} + ص^{٢})^{ن}$ حسب
قوى س التنازلية يحتوي على حد
يشتمل على $س^{١٢} ص^{٢٠}$ فإن الحد
الأوسط هو .....

أ $ح_{٧}$ ب $ح_{٨}$ ج $ح_{١١}$ د $ح_{١٥}$

10 أ ب ج مثلث فيه أ (١، ٣، ٣)،
ب (٠، ١، ٢)، ج (٥، ٧، ١) إذا كانت
د منتصف $\overline{أج}$، فإن $||\overrightarrow{بد}||$ = ...

أ $٤\sqrt{٥}$ ب $٣\sqrt{٥}$ ج ٦ د ٥

11 إذا كان ع عددًا مركبًا سعته
الأساسية θ ومقياسه ل وكان
ل = ٢، جتا θ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$، جا θ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$
،فإن : ع^{٢} = ...

أ $٢(جتا\frac{\pi}{٢} + ت\ جا\frac{\pi}{٢})$
ب $٤(جتا\frac{\pi}{٤} + ت\ جا\frac{\pi}{٤})$
ج $٤(جتا\frac{\pi}{٢} + ت\ جا\frac{\pi}{٢})$
د $٢(جتا\frac{\pi}{٤} + ت\ جا\frac{\pi}{٤})$

12 إذا كان حجم الجسم الناشئ من
دوران المنطقة المحددة بالمنحنى
ص = $\sqrt{٦}\ هـ^{س}$ والمستقيمات
ص = صفر، س = صفر، س = ١
دورة كاملة حول محور السينات
يساوي $\frac{\pi ٣}{أ}$ ($هـ^{٦}$ − ١) وحدة مكعبة
، فإن أ^{٢} = ... حيث أ > صفر

أ ٣٦ ب ٩ ج ٦ د ٣

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

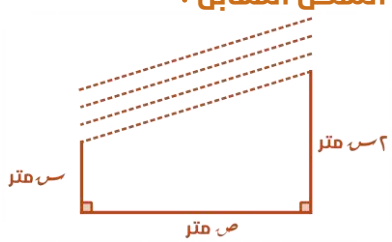
13 إذا كانت ص = ٣ لو$_{٧}$ س + لو$_{٧}$ س ، فإن $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ = ...

أ $-\frac{١}{س^{٢}}$ لو$_{٧}$ هـ
ب $\frac{١}{س^{٢}}$ لو$_{٧}$ هـ
ج $\frac{١}{س^{٢}}$ لو$_{٧}$ ٣
د $-\frac{١}{س^{٢}}$ لو$_{٧}$ ٣

14 في مفكوك $(س + \frac{٢}{س^{٢}})^{٨}$ حسب قوى س التنازلية قيمة س التي تجعل الحد الأوسط يساوي ٧٠ يمكن أن تساوي .....

أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٤

الشكل المقابل :



15 يوضح قطعة أرض مفتوحة على شكل شبه منحرف قائم الزاوية، يحدها نهر مستقيم من أحد جوانبها كما بالرسم يُراد عمل سياج طوله ١٢٠ مترًا حول الجوانب الثلاثة الأخرى لقطعة الأرض فإن أكبر مساحة لقطعة الأرض = ... متر مربع

أ ١٢٠٠ ب ١٨٠٠ ج ٣٥١٠ د ٣٦٠٠

16 $\int هـ^{جاس} \times$ جا ٢س جتا س د س = ... + ث

أ $هـ^{جاس}$ (جا س − ١) ب ٢ $هـ^{جاس}$ (١ − جا س)
ج ٢ $هـ^{جاس}$ (جا س − ١) د $هـ^{جاس}$ (١ − جا س)

17 إذا كان المستقيم ل$_{١}$: $\frac{س}{-٨} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٢}$ عموديًا على المستقيم ل$_{٢}$: $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ١}{ك} = \frac{ع - ٣}{م}$ فإن ٥ ك + ٢ م = ...

أ −١٦ ب صفر ج ٨ د ١٦

18 القيمة للعظمى المطلقة للدالة د : د (س) = س + $\frac{٤}{س}$ في الفترة [١ ، ٣] تساوي .....

أ −٤ ب ٤ ج $\frac{١٣}{٣}$ د ٥

19 أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها يساوي $\frac{٥}{٧}$ من ارتفاعها تتمدد بانتظام بالحرارة بحيث تظل محتفظة بشكلها وبنفس النسبة فيزداد ارتفاعها بمعدل ٠,٠٠٢١ سم/ث ، أوجد معدل تغير حجم الأسطوانة عندما يكون طول الارتفاع = ١٤ سم (علمًا بأن حجم الأسطوانة π نق^{٢} ع)

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بالطلاب الوافدين
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بالطلاب المنتظمين
ENG/AHMED ESSAM ELDIN بيدج الفيس بوك
ENG . AHMED ESSAM قناة اليوتيوب
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

إذا كانت : ١ ، ω ، ω^{٢} هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، فأثبت أن :

$$\left(\frac{ك + م\,ω}{ك\,ω^{٢} + م} + \frac{ل\,ω^{٢} - ن}{ل - ن\,ω}\right)^{٢٥} = -١$$

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بنا لطلاب الإعلانات
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بنا لطلاب السنتر
ENG/AHMED ESSAM ELDIN بيدج المستر أحمد عصام على فيس بوك
ENG . AHMED ESSAM قناة اليوتيوب
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

دور ثاني 2025

1 إذا كانت $ل_{(ص)} = هـ^{س}$ فإن :
$\frac{د ص}{د س}$ = ... حيث ص > ١

أ $ص هـ^{س} ل_{(و)} ٥$
ب $ص ل_{(و)} ٥$
جـ $هـ^{س} ل_{(و)} ٥$
د $ص هـ^{س} ل_{(و)} هـ$

2 $\int \frac{هـ^{س} + جتا س}{هـ^{س} + جا س} د س$ = ... + ث

أ $ل_{(و)} |هـ^{س} - جا س|$
ب $ل_{(و)} |هـ^{س} + جا س|$
جـ $ل_{(و)} |جا س|$
د $- ل_{(و)} |جا س|$

3 إذا كان العدد المركب ع = ت،
فإن معكوسه الضربي يُمثل في
مستوى أرجاند بالنقطة .....

أ (٠، -١)
ب (١، ٠)
جـ (٠، ١)
د (-١، ٠)

4 في مفكوك $(س^{٢} + \frac{م}{س})^{١٠}$ حسب
قوى $س$ التنازلية، إذا كان معامل
الحد الأوسط = $\frac{٢٨}{٢٧}$ فإن م = ...

أ $\frac{١}{٧}$
ب $\frac{١}{٥}$
جـ $\frac{١}{٤}$
د $\frac{١}{٣}$

5 عددان صحيحان موجبان
مجموعهما ٦٠، إذا كان حاصل
ضرب أصغرهما في مربع أكبرهما
قيمة عظمى، فإن مجموع مربعي
العددين = ...

أ ٢٦٠٠
ب ٢٢٥٠
جـ ٢٠٠٠
د ١٨٠٠

6 إذا كانت أ (-٢، ك، ١) وكان :
$|\overrightarrow{أ أ}| = ٣$، فإن قيمة ك = $\pm$ .....

أ ١
ب ٢
جـ ٣
د ٤

7 $\int هـ^{س} (س^{٢} + ٢ س) د س$
= ..... + ث

أ $س^{٢} هـ^{س}$
ب $٢ س هـ^{س}$
جـ $هـ^{س} (س + ٢)$
د $٢ هـ^{س} (س + ١)$

8 في مفكوك $(٧ س + \frac{٦}{س^{٢}})^{١٢}$ حسب
قوى $س$ التنازلية يكون الحد
الخالي من $س$ هو .....

أ $ح_{٤}$
ب $ح_{٥}$
جـ $ح_{٦}$
د $ح_{٧}$

WWW.JAWACADEMY.NET الموقع الخاص بنا لطلاب الإعدادية
WWW.MRAHMEDESSAM.COM الموقع الخاص بنا لطلاب الثانوية
ENG/AHMED ESSAM ELDIN بيدج الفيس بوك
ENG . AHMED ESSAM قناة اليوتيوب
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

9 إذا كانت قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هي $(١٣٥^\circ، ٦٠^\circ، \theta_ع)$، فإن قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $(-\overrightarrow{أ})$ يمكن أن تكون .....

أ $(٤٥^\circ، ٦٠^\circ، ٦٠^\circ)$ ب $(٤٥^\circ، ١٢٠^\circ، ١٢٠^\circ)$

جـ $(١٣٥^\circ، ٦٠^\circ، ٦٠^\circ)$ د $(١٣٥^\circ، ١٢٠^\circ، ١٢٠^\circ)$

10 إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى الدالة $ص = د(س)$ عند أي نقطة عليه $(س، ص)$ هو $٦س - ٣$، وكان المنحنى يمر بالنقطة $(٢، ٢)$ وله مماس أفقي عند $س = ١$، فإن معادلة المنحنى هي $ص =$ .....

أ $س^٣ - \frac{٣}{٢}س^٢$ ب $س^٣ - \frac{٣}{٢}س^٢ + ٢$

جـ $س^٣ - ٣س^٢ + ٦$ د $س^٣ + \frac{٣}{٢}س^٢ - ١٢$

11 إذا كان قياس الزاوية بين المستويين :

$٣س - ٦ص + م ع = ٤$،

$س + ع = ٧$ يساوي ٤٥° فإن : $م =$ ..

أ -٩ ب صفر جـ ٤ د ٦

12 إذا كانت $هـ^٢(ص) = هـ^{س^{-١}} + ٦$، فإن :

$٢(ص')^٢ + ص'' =$ .....

أ $ص''$ ب $٢ص''$ جـ $٤ص''$ د $٨ص''$

13 إذا كان $ع_١$، $ع_٢$ عددان مركبان وكان : $|\overline{ع_١}| = ٢$، السعة الأساسية للعدد $\overline{ع_١} = \frac{\pi}{٣}$، $|ع_٢| = ٣$، والسعة الأساسية للعدد $ع_٢ = -\frac{\pi}{٣}$، فإن $ع_١ \overline{ع_٢} =$ .....

أ $٦(جتا صفر^\circ + ت جا صفر^\circ)$

ب $٦(جتا ١٢٠^\circ + ت جا ١٢٠^\circ)$

جـ $٦(جتا(-١٢٠^\circ) + ت جا(-١٢٠^\circ))$

د $١٢(جتا صفر^\circ + ت جا صفر^\circ)$

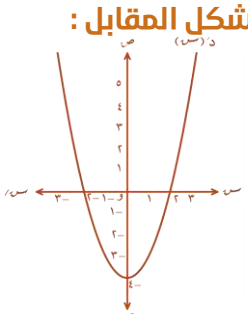
14 إذا كان المستقيم $ل_١$:

$\overrightarrow{ر} = (-٢س + ٣ص + ع)_{ك_١} + (٥س - ص + ع)$ يوازي المستقيم $ل_٢$: $\overrightarrow{ر} = ٣س - ٣ص + ٥ع)_{ك_٢} + م(س - ٥ص + ٥ع)$،

فإن : قيمة م = ...

أ -٢ ب -١ جـ ٥ د ٢٥

15 كان الشكل المقابل :



يمثل منحنى $د(س)$ للدالة كثيرة الحدود د حيث $-٣ \leq س \leq ٣$، فإن منحنى الدالة د $(س)$ له نقطة انقلاب عند $س =$ .....

أ -٤ ب صفر جـ -٣ د ٣

قناة اليوتيوب ENG . AHMED ESSAM
بيدج الفيس بوك ENG/AHMED ESSAM ELDIN
الموقع الخاص بطلاب الثانوية WWW.MRAHMEDESSAM.COM
الموقع الخاص بطلاب الإعدادية WWW.JAWACADEMY.NET
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

16 إذا كان حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\frac{1}{\sqrt{س + 2}}$ والمستقيمات ص = صفر، س = صفر، س = ٢ دورة كاملة حول محور السينات يساوي π لو٣٢ وحدة مكعبة، فإن :
أ = ... حيث أ > صفر

أ $\sqrt{٣}$ ب $\sqrt{٥}$ جـ ٣ د ٥

17 في مفكوك $(٢ + ٥ س)^{١٠}$ حسب قوى س التصاعدية، إذا كان $\frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} = \frac{١٥}{٢٨}$ ، فإن قيمة ٨ س = ...

أ $\frac{٣}{٨}$ ب $\frac{٣}{٢}$ جـ ٣ د ١٢

18 القيمة العظمى المطلقة للدالة : د : د $(س) = س هـ^{-س}$ في الفترة [٠، ٢] تساوي .....

أ $\frac{-١}{هـ}$ ب صفر جـ هـ د ٢ هـ^{٢}

19 تزداد مساحة سطح كرة بمعدل ١٢ سم^{٢}/ث. أوجد معدل الزيادة في حجم الكرة عند اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطر الكرة = ٦ سم.
(علمًا بأن مساحة سطح الكرة ٤ π نق^{٢}، حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣})

20 إذا كانت : ١، ω، ω^{٢} هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح، فأثبت أن :
$(\frac{١}{ω} - ω٢ + ω^{٢})(\frac{١}{ω^{٢}} - ω٢ + \frac{١}{ω + ω^{٢}}) = \pm \sqrt{٣}$ ت

WWW.JAWACADEMY.NET
WWW.MRAHMEDESSAM.COM
ENG/AHMED ESSAM ELDIN
ENG . AHMED ESSAM
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي

امسح الباركود بالموبيل لتثبيت التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه

MR

حمل التطبيق الأن

GET IT ON Google Play

ملازم ابتدائي | ملازم اعدادي | ملازم ثانـــوي | كورسات ونتائج امتحانات

موقع الدكتور محمد رزق
Dr.MoRizk